

宿題 5 の解答

July 10, 2018

1. 次の記述のそれぞれについて、内容の正誤を答えなさい。

- (a) 経済モデルにおける均衡とは、モデルで描写した経済において実現するであろう状態のことである。 T
- (b) 競争市場とは、それぞれの企業が他の企業の行動を念頭に置きながら戦略的に競い合う市場のことである。 F
- (c) 競争均衡とは、全ての市場で総需要と総供給とが一致している状態を言う。 T
- (d) 競争均衡価格とは、企業間の競争を最も促す価格体系のことである。 F
- (e) 競争均衡価格は無数に存在する。 T
- (f) 厚生経済学の第一基本定理とは、効率的な配分であれば必ず競争均衡になるという結果である。 F
- (g) 競争市場を通して効率的な配分を実現するためには、それがどのような配分であるのかを事前に把握しておく必要がある。 F

2. 二人の消費者と二つの企業からなる経済を考えよう。消費者 1 と消費者 2 の選好は、それぞれ $U^1(x_1, r_1) := x_1 r_1^2$ と $U^2(x_2, r_2) := x_2^2 r_2$ のような効用関数によって代表されているとする。ここで、 x_i と r_i は消費者 $i \in \{1, 2\}$ の財と余暇の消費量をそれぞれ表わす。それぞれの消費者には m_i だけの不労所得があり、また $\bar{z} := 16$ 時間の中から r_i 時間を余暇に充て、残りの $\bar{z} - r_i$ 時間を労働に充てることができる。一方、企業 $j \in \{1, 2\}$ の生産技術は、それぞれ $x_1 = f_1(z_1) := z_1^{1/2}$ と $x_2 = f_2(z_2) := (z_2/2)^{1/2}$ のような生産関数によって代表されているとする。ここで、 x_j と z_j は企業 $j \in \{1, 2\}$ の生産量と労働投入量を表わす。

- (a) 各企業について、供給関数 $x_j^s(w, p)$ 、および労働需要関数 $z_j^d(w, p)$ を求めなさい。
(解答) まず、各企業の費用関数が

$$c_1(x_1) := wx_1^2, \quad c_2(x_2) := 2wx_2^2 \quad (1)$$

であることに注意する。財の供給量は価格と限界費用が等しくなるように選ばれるので、企業 $j \in \{1, 2\}$ によって選ばれる z と x の組を (z_j^*, r_j^*) とおくと、

$$p = c_j'(x_j^*) \quad \forall j \in \{1, 2\} \quad (2)$$

が成立しているはずである。

したがって、企業 1 は

$$(2) \iff p = 2wx_1^* \iff x_1^* = \underbrace{\frac{p}{2w}}_{=x_1^s(w,p)} \quad (3)$$

だけの財を供給し、そのために

$$wz_1^* = c_1(x_1^*) \iff z_1^* = \frac{c_1(x_1^*)}{w} = \underbrace{\frac{1}{4} \left(\frac{p}{w}\right)^2}_{=z_1^d(w,p)} \quad (4)$$

だけの労働を需要する.

一方、企業 2 は

$$(2) \iff p = 4wx_2^* \iff x_2^* = \underbrace{\frac{p}{4w}}_{=x_2^s(w,p)} \quad (5)$$

だけの財を供給し、そのために

$$wz_2^* = c_2(x_2^*) \iff z_2^* = \frac{c_2(x_2^*)}{w} = \underbrace{\frac{1}{8} \left(\frac{p}{w}\right)^2}_{=z_2^d(w,p)} \quad (6)$$

だけの労働を需要する.

- (b) 各企業の最大化された利潤 $\pi_j^*(w, p) := px_j^s(w, p) - wz_j^d(w, p)$ を求めなさい.

(解答) 企業 1 については、(3) と (4) とを合わせることで

$$\begin{aligned} \pi_1^*(w, p) &= px_1^s(w, p) - wz_1^d(w, p) \\ &= p \frac{p}{2w} - w \frac{1}{4} \left(\frac{p}{w}\right)^2 \\ &= w \frac{1}{4} \left(\frac{p}{w}\right)^2 \end{aligned} \quad (7)$$

であり、企業 2 については、(5) と (6) とを合わせることで

$$\begin{aligned} \pi_2^*(w, p) &= px_2^s(w, p) - wz_2^d(w, p) \\ &= p \frac{p}{4w} - w \frac{1}{8} \left(\frac{p}{w}\right)^2 \\ &= w \frac{1}{8} \left(\frac{p}{w}\right)^2 \end{aligned} \quad (8)$$

と計算できる.

- (c) 経済全体の集計供給関数 $X^s(w, p)$ と集計労働需要関数 $Z^d(w, p)$ を求めなさい.

(解答) 集計供給関数については、(3) と (5) とを合わせることで

$$X^s(w, p) = \sum_{j=1}^2 x_j^s(w, p) = \frac{p}{2w} + \frac{p}{4w} = \frac{3}{4} \frac{p}{w} \quad (9)$$

のように計算でき集計労働需要関数については、(4)と(6)とを合わせることで

$$Z^d(w, p) = \sum_{j=1}^2 z_j^d(w, p) = \frac{1}{4} \left(\frac{p}{w}\right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{p}{w}\right)^2 = \frac{3}{8} \left(\frac{p}{w}\right)^2 \quad (10)$$

のように求められる。

- (d) 各消費者について、需要関数 $x_i^d(p, w, m_i)$, $r_i^d(p, w, m_i)$ および労働供給関数 $z_i^s(p, w, m_i)$ を求めなさい。

(解答) 以下の解答では、 \bar{z} に具体的な数値 ($\bar{z} = 16$) を代入せずに話を進める。消費者 $i \in \{1, 2\}$ によって需要される財と余暇の組を (x_i^*, r_i^*) とおくと、

$$\frac{U_1^i(x_i^*, r_i^*)}{U_2^i(x_i^*, r_i^*)} = \frac{p}{w} \quad \forall i \in \{1, 2\} \quad (11)$$

かつ

$$px_i^* + wr_i^* = w\bar{z} + m_i \quad \forall i \in \{1, 2\} \quad (12)$$

を満たすはずである。

いま、消費者 1 の限界効用は

$$U_1^1(x_1, r_1) = r_1^2, \quad U_2^1(x_1, r_1) = 2x_1r_1 \quad (13)$$

と計算できるので、限界代替率は

$$\frac{U_1^1(x_1, r_1)}{U_2^1(x_1, r_1)} = \frac{r_1^2}{2x_1r_1} = \frac{r_1}{2x_1} \quad (14)$$

である。したがって、

$$(11) \iff \frac{r_1^*}{2x_1^*} = \frac{p}{w} \iff wr_1^* = 2px_1^* \quad (15)$$

であり、これを(12)と併せれば、財と余暇についての需要関数を

$$x_1^d(p, w, m_1) = \frac{1}{3} \frac{w\bar{z} + m_1}{p}, \quad r_1^d(p, w, m_1) = \frac{2}{3} \frac{w\bar{z} + m_1}{w} \quad (16)$$

のように得る。また、 \bar{z} 時間のうちの $r_1^d(p, w, m_1)$ 時間を余暇として消費するということは、残りの $\bar{z} - r_1^d(p, w, m_1)$ 時間を労働に用いることである。したがって、(16)を用いれば、労働供給関数は

$$z_1^s(p, w, m_1) = \bar{z} - r_1^d(p, w, m_1) = \frac{1}{3}\bar{z} - \frac{2}{3} \frac{m_1}{w} \quad (17)$$

のように求めることができる。

一方、消費者 2 の限界効用は

$$U_1^2(x_2, r_2) = 2x_2r_2, \quad U_2^2(x_2, r_2) = x_2^2 \quad (18)$$

と計算できるので、限界代替率は

$$\frac{U_1^2(x_2, r_2)}{U_2^2(x_2, r_2)} = \frac{2x_2r_2}{x_2^2} = \frac{2r_2}{x_2} \quad (19)$$

である。したがって、

$$(11) \iff \frac{2r_2^*}{x_2^*} = \frac{p}{w} \iff wr_2^* = \frac{1}{2}px_2^* \quad (20)$$

であり、これを (12) と併せれば、財と余暇についての需要関数を

$$x_2^d(p, w, m_2) = \frac{2}{3} \frac{w\bar{z} + m_2}{p}, \quad r_2^d(p, w, m_2) = \frac{1}{3} \frac{w\bar{z} + m_2}{w} \quad (21)$$

のように得る。また、 \bar{z} 時間のうちの $r_2^d(p, w, m_2)$ 時間を余暇として消費するということは、残りの $\bar{z} - r_2^d(p, w, m_2)$ 時間を労働に用いることである。したがって、(21) を用いれば、労働供給関数は

$$z_2^s(p, w, m_2) = \bar{z} - r_2^d(p, w, m_2) = \frac{2}{3}\bar{z} - \frac{1}{3} \frac{m_2}{w} \quad (22)$$

のように求めることができる。

- (e) 経済全体の集計需要関数 $X^d(p, w, m_1, m_2)$ と集計労働供給関数 $Z^s(p, w, m_1, m_2)$ を求めなさい。

(解答) 集計需要関数については、(16) と (21) とを合わせることで

$$\begin{aligned} X^d(p, w, m_1, m_2) &= \sum_{i=1}^2 x_i^d(p, w, m_i) \\ &= \frac{1}{3} \frac{w\bar{z} + m_1}{p} + \frac{2}{3} \frac{w\bar{z} + m_2}{p} \\ &= \left(\bar{z} + \frac{1}{3} \frac{m_1}{w} + \frac{2}{3} \frac{m_2}{w} \right) \frac{w}{p} \end{aligned} \quad (23)$$

のように計算でき集計労働供給関数については、(17) と (22) とを合わせることで

$$\begin{aligned} Z^s(p, w, m_1, m_2) &= \sum_{i=1}^2 z_i^s(p, w, m_i) \\ &= \frac{1}{3}\bar{z} - \frac{2}{3} \frac{m_1}{w} + \frac{2}{3}\bar{z} - \frac{1}{3} \frac{m_2}{w} \\ &= \bar{z} - \frac{2}{3} \frac{m_1}{w} - \frac{1}{3} \frac{m_2}{w} \end{aligned} \quad (24)$$

のように求められる。

(f) 二人の消費者がいずれも各企業の 50% ずつを所有しているとして、

i. この経済における競争均衡価格 (p^*, w^*) を求めなさい。

(解答) 企業は消費者の間で等しく所有されているので、利潤は二人の消費者に均等に分配される。つまり、(7) と (8) を用いれば、不労所得は

$$\begin{aligned} m_i(w, p)^* &:= \frac{1}{2}\pi_1^*(w, p) + \frac{1}{2}\pi_2^*(w, p) \\ &= \frac{1}{2}w\frac{1}{4}\left(\frac{p}{w}\right)^2 + \frac{1}{2}w\frac{1}{8}\left(\frac{p}{w}\right)^2 \\ &= w\frac{3}{16}\left(\frac{p}{w}\right)^2 \quad \forall i \in \{1, 2\} \end{aligned} \quad (25)$$

のように決まる。均衡価格を (p^*, w^*) とおくと、(25) および (23) と (9) から

$$\begin{aligned} X^d(p^*, w^*, m_1^*(w^*, p^*)) &= X^s(w^*, p^*) \\ \iff \left(\bar{z} + \frac{1}{3}\frac{m_1^*(w^*, p^*)}{w^*} + \frac{2}{3}\frac{m_2^*(w^*, p^*)}{w^*} \right) \frac{w^*}{p^*} &= \frac{3}{4}\frac{p^*}{w^*} \\ \iff \bar{z} + \frac{3}{16}\left(\frac{p^*}{w^*}\right)^2 &= \frac{3}{4}\left(\frac{p^*}{w^*}\right)^2 \\ \iff \bar{z} &= \frac{9}{16}\left(\frac{p^*}{w^*}\right)^2 \\ \iff \frac{p^*}{w^*} &= \frac{4}{3}\bar{z}^{1/2} \end{aligned} \quad (26)$$

が求まる。この (26) を満たす (p^*, w^*) は、労働市場の需給一致条件

$$Z^s(p^*, w^*, m_1^*(w^*, p^*)) = Z^d(w^*, p^*) \quad (27)$$

も同時に満たす。

ii. 競争均衡における配分 $(x_1^c, r_1, x_2^c, r_2, z_1, x_1^p, z_2, x_2^p)$ を求めなさい。

(解答) まず、(16) と (26) から消費者 1 は均衡で

$$\begin{aligned} x_1^d(p^*, w^*, m_1^*(w^*, p^*)) &= \frac{1}{3}\frac{w^*\bar{z} + m_1^*(w^*, p^*)}{p^*} \\ &= \frac{w^*}{p^*}\frac{1}{3}\left(\bar{z} + \frac{m_1^*(w^*, p^*)}{w^*}\right) \\ &= \frac{w^*}{p^*}\frac{1}{3}\left(\bar{z} + \frac{3}{16}\left(\frac{p^*}{w^*}\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{3}\bar{z}^{1/2} \end{aligned} \quad (28)$$

だけの財を消費し

$$\begin{aligned}
r_1^d(p^*, w^*, m_1^*(w^*, p^*)) &= \frac{2 w^* \bar{z} + m_1^*(w^*, p^*)}{3 w^*} \\
&= \frac{2}{3} \left(\bar{z} + \frac{3}{16} \left(\frac{p^*}{w^*} \right)^2 \right) \\
&= \frac{2}{3} \left(\bar{z} + \frac{3}{9} \bar{z} \right) \\
&= \frac{8}{9} \bar{z}
\end{aligned} \tag{29}$$

だけの余暇を消費する. 一方, 消費者 2 については, (21) と (26) から

$$\begin{aligned}
x_1^d(p^*, w^*, m_1^*(w^*, p^*)) &= \frac{2 w^* \bar{z} + m_2^*(w^*, p^*)}{3 p^*} \\
&= \frac{w^* 2}{p^* 3} \left(\bar{z} + \frac{m_2^*(w^*, p^*)}{w^*} \right) \\
&= \frac{w^* 2}{p^* 3} \left(\bar{z} + \frac{3}{16} \left(\frac{p^*}{w^*} \right)^2 \right) \\
&= \frac{2}{3} \bar{z}^{1/2}
\end{aligned} \tag{30}$$

だけの財を消費し

$$\begin{aligned}
r_2^d(p^*, w^*, m_2^*(w^*, p^*)) &= \frac{1 w^* \bar{z} + m_2^*(w^*, p^*)}{3 w^*} \\
&= \frac{1}{3} \left(\bar{z} + \frac{3}{16} \left(\frac{p^*}{w^*} \right)^2 \right) \\
&= \frac{1}{3} \left(\bar{z} + \frac{3}{9} \bar{z} \right) \\
&= \frac{4}{9} \bar{z}
\end{aligned} \tag{31}$$

だけの余暇を消費する.

企業 1 は, (26) および (4) と (3) を合わせることで

$$z_1^d(w^*, p^*) = \frac{1}{4} \left(\frac{p^*}{w^*} \right)^2 = \frac{4}{9} \bar{z} \tag{32}$$

だけの労働を投入し,

$$x_1^s(w^*, p^*) = \frac{p^*}{2w^*} = \frac{2}{3} \bar{z}^{1/2} \tag{33}$$

だけの財を生産する. 一方, 企業 2 は, (26) および (6) と (5) を合わせることで

$$z_2^d(w^*, p^*) = \frac{1}{8} \left(\frac{p^*}{w^*} \right)^2 = \frac{2}{9} \bar{z} \tag{34}$$

だけの労働を投入し,

$$x_2^s(w^*, p^*) = \frac{p^*}{4w^*} = \frac{1}{3}\bar{z}^{1/2} \quad (35)$$

だけの財を生産する.

以上から, 均衡における配分は

$$\begin{aligned} & (x_1^c, r_1, x_2^c, r_2, z_1, x_1^p, z_2, x_2^p) \\ & = \left(\frac{1}{3}\bar{z}^{1/2}, \frac{8}{9}\bar{z}, \frac{2}{3}\bar{z}^{1/2}, \frac{4}{9}\bar{z}, \frac{4}{9}\bar{z}, \frac{2}{3}\bar{z}^{1/2}, \frac{2}{9}\bar{z}, \frac{1}{3}\bar{z}^{1/2} \right) \end{aligned} \quad (36)$$

である.