宿題 4 の解答

July 6, 2018

1. 次の記述のそれぞれについて，内容の正誤を答えなさい．

   (a) ある状態が衡平であるためには全ての人が同じ扱いを受ける必要がある．F
   (b) パレート改善とは，経済の生産性を上昇させることである．F
   (c) ある状態がパレート効率的であるとは，それが社会的に見て最も望ましい状態であることを意味する．F
   (d) 配分 a がパレート効率的でなく，別の配分 $\tilde{a}$ がパレート効率的であるとき，a から $\tilde{a}$ への再配分はパレート改善である．F
   (e) 一人の個人が全ての富を独占するような配分はパレート効率的ではない．F
   (f) いくらか財の消費を諦めてもよいので労働時間をもっと減らしたいと誰もが思っている時，状況をパレート改善する方法が常に存在する．F
   (g) パレート効率的な配分を見つける際には，消費者の間で財をどのように分配するかということと，その財を生産者がどのように生産するかということを，多くの場合切り離して考えて差し支えない．F

2. 二人の消費者が 4 単位の財と 4 単位の余暇を分け合う交換経済を考えよう．消費者 1 と消費者 2 の選好は，それぞれ $U^1(x_1, r_1) := x_1 r_1^2$ と $U^2(x_2, r_2) := x_2^2 r_2$ のような効用関数によって代表されているとする．ここで，x_i と r_i は消費者 $i \in \{1, 2\}$ の財と余暇の消費量をそれぞれ表わす．

   (a) この経済において $(x_1, r_1, x_2, r_2) = (1, 1, 4, 3)$ という配分は実現可能であるか，その理由と併せて答えなさい．

   （解答）この配分は実現可能でない．経済に存在する財の総量よりも多くの財（$x_1 + x_2 = 5 > 4$）が必要になるため．

   (b) 二つの配分

   $$a := (x_1, r_1, x_2, r_2) := (1, 1, 3, 3), \quad \tilde{a} := (\tilde{x}_1, \tilde{r}_1, \tilde{x}_2, \tilde{r}_2) := (2, 2, 2, 2)$$

   を考える．配分 a は配分 $\tilde{a}$ をパレート改善するか，あるいは逆に配分 $\tilde{a}$ は配分 a をパレート改善するか，その理由と併せて答えなさい．

   （解答）a は $\tilde{a}$ をパレート改善しないし，逆に $\tilde{a}$ が a をパレート改善するというわけでもない．消費者 1 にとっては a よりも $\tilde{a}$ の方が好ましく（$U^1(x_1, r_1) < U^1(\tilde{x}_1, \tilde{r}_1)$）消費者 2 にとっては $\tilde{a}$ よりも a の方が好ましい（$U^2(x_2, r_2) > U^2(\tilde{x}_2, \tilde{r}_2)$）からである．

   (c) 次の配分のそれぞれについて，それがパレート効率的な配分であるか，その理由と併せて考えなさい．

i. $(x_1, r_1, x_2, r_2) = (2, 2, 2, 2)$
（解答）この配分はパレート効率的でない．というのも，

$$\frac{U_1^1(x_1, r_1)}{U_2^1(x_1, r_1)} = \frac{1}{2} < 2 = \frac{U_1^2(x_2, r_2)}{U_2^2(x_2, r_2)} \tag{1}$$

のように，限界代替率が二人の消費者の間で一致していないからである．このケースでは，消費者 1 の限界代替率よりも消費者 2 の限界代替率の方が大きい（同じ量の財を得るのであっても消費者 2 の方がそれと引き換えに支払ってもよい余暇の量が多い）．したがって，財を消費者 1 から消費者 2 に移転し，その代わりに余暇を消費者 2 から消費者 1 へ移転すれば，パレート改善となるはずである．実際，設問の配分は $(x_1, r_1, x_2, r_2) = (1, 3, 3, 1)$ という別の実現可能な配分によってパレート改善される（$U^1(2, 2) < U^1(1, 3)$ かつ $U^2(2, 2) < U^2(3, 1)$ となる）．

ii. $(x_1, r_1, x_2, r_2) = (1, 3, 3, 1)$
（解答）この配分はパレート効率的でない．というのも，

$$\frac{U_1^1(x_1, r_1)}{U_2^1(x_1, r_1)} = \frac{3}{2} < \frac{2}{3} = \frac{U_1^2(x_2, r_2)}{U_2^2(x_2, r_2)} \tag{2}$$

のように，限界代替率が二人の消費者の間で一致していないからである．依然として消費者 1 の限界代替率よりも消費者 2 の限界代替率の方が大きいので，財を消費者 1 から消費者 2 に移転し，その代わりに余暇を消費者 2 から消費者 1 へ移転すれば，パレート改善となるはずである．実際，例えば $(x_1, r_1, x_2, r_2) = (4/3, 8/3, 8/3, 4/3)$ という別の実現可能な配分によって，設問の配分はパレート改善される（$U^1(1, 3) < U^1(4/3, 8/3)$ かつ $U^2(3, 1) < U^2(4/3, 8/3)$ となる）．

iii. $(x_1, r_1, x_2, r_2) = (4, 4, 0, 0)$
（解答）この配分はパレート効率的である．この配分から再配分を行おうとすると，必ず消費者 1 が不満を抱くことになるため．

3. 二人の消費者と二つの企業からなる経済を考えよう．消費者 1 と消費者 2 の選好は，それぞれ $U^1(x_1^c, r_1) := x_1^c r_1^2$ と $U^2(x_2^c, r_2) := (x_2^c)^2 r_2$ のような効用関数によって代表されているとする．ここで，x_i^c と r_i は消費者 $i \in \{1, 2\}$ の財と余暇の消費量をそれぞれ表わす．それぞれの消費者は，$\bar{z} := 8$ 時間の中から r_i 時間を余暇に充て，残りの $\bar{z} - r_i$ 時間を労働に充てることができる．一方，企業 $j \in \{1, 2\}$ の生産技術は，それぞれ $x_1^p = f_1(z_1) := z_1^{1/2}$ と $x_2^p = f_2(z_2) := (z_2/2)^{1/2}$ のような生産関数によって代表されているとする．ここで，x_j^p と z_j は企業 $j \in \{1, 2\}$ の生産量と労働投入量を表わす．

(a) この経済全体で最大何時間を労働に用いることができるか答えなさい．
（解答）二人の消費者がそれぞれ $\bar{z} = 8$ 時間まで労働することができるので，経済全体での最大値は $2\bar{z} = 16$ 時間となる．

(b) この経済全体で最大どれだけの財を生産できるか答えなさい．

（解答）この経済で労働に用いることのできる $2\bar{z} = 16$ 時間の労働を二つの企業が無駄なく分け合うことができれば，財の生産量を最大化することができるはずである．つまり，$z_1 + z_2 = 2\bar{z}$ を満たす (z_1, z_2) の組の中から，二つの企業の生産量の合計 $f_1(z_1) + f_2(z_2)$ を最大にする組み合わせを選べば良い．これは

$$B(\bar{z}) := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2_+ \mid z_1 + z_2 = 2\bar{z}\} \tag{3}$$

および

$$F(z_1, z_2) := f_1(z_1) + f_2(z_2) \tag{4}$$

として

$$(z_1^*, z_2^*) \in \underset{(z_1, z_2) \in B(\bar{z})}{\operatorname{argmax}} \ F(z_1, z_2) \tag{5}$$

を満たす (z_1^*, z_2^*) を見つけることに等しい．そのような (z_1^*, z_2^*) は，数学補論の定理 3 から，

$$\frac{F_1(z_1^*, z_2^*)}{F_2(z_1^*, z_2^*)} = \frac{1}{1} \iff \frac{\frac{1}{2}(z_1^*)^{-1/2}}{\frac{1}{2^{1/2}}(z_2^*)^{-1/2}} = 1 \iff z_1^* = 2z_2^* \tag{6}$$

かつ

$$z_1^* + z_2^* = 2\bar{z} \tag{7}$$

を満たすはずである．この連立方程式を解くと，$(z_1^*, z_2^*) = (4\bar{z}/3, 2\bar{z}/3)$ を得る．つまり，企業 1 が $4\bar{z}/3$ 時間（全体で $2\bar{z}$ 時間のうちの 2/3）だけの労働を投入し，企業 2 が $2\bar{z}/3$ 時間（全体で $2\bar{z}$ 時間のうちの 1/3）だけの労働を投入すればよい．したがって，経済全体で生産することができる財の最大値は

$$F(z_1^*, z_2^*) = f_1(z_1^*) + f_2(z_2^*) = \left(\frac{4\bar{z}}{3}\right)^{1/2} + \left(\frac{\bar{z}}{3}\right)^{1/2} = (3\bar{z})^{1/2} = (24)^{1/2} \tag{8}$$

である．

(c) 二つの配分

$$a := (x_1^c, r_1, x_2^c, r_2, z_1, x_1^p, z_2, x_2^p) := (2, 2, 2, 2, 4, 2, 8, 2),$$

$$\tilde{a} := (\tilde{x}_1^c, \tilde{r}_1, \tilde{x}_2^c, \tilde{r}_2, \tilde{z}_1, \tilde{x}_1^p, \tilde{z}_2, \tilde{x}_2^p) := (2, 8/3, 2, 8/3, 64/9, 8/3, 32/9, 4/3)$$

を考える．

i. 配分 a と配分 $\tilde{a}$ はこの経済において実現可能であるか，その理由と併せて答えなさい．

（解答）配分 a と配分 $\tilde{a}$ はいずれも実現可能である．

ii. 配分 a は配分 $\tilde{a}$ をパレート改善するか，あるいは逆に配分 $\tilde{a}$ は配分 a をパレート改善するか，その理由と併せて答えなさい．

（解答）いずれの消費者も (x_i, r_i) よりも $(\tilde{x}_i, \tilde{r}_i)$ を好むので，配分 $\tilde{a}$ は配分 a をパレート改善する．

(d) 次の配分のそれぞれについて，それがパレート効率的な配分であるか，その理由と併せて答えなさい．

i. $(x_1^c, r_1, x_2^c, r_2, z_1, x_1^p, z_2, x_2^p) = (2, 2, 2, 2, 4, 2, 8, 2)$
（解答）パレート効率的でない．というのも，

$$\frac{U_1^1(x_1^c, r_1)}{U_2^1(x_1^c, r_1)} = \frac{1}{2} < 2 = \frac{U_1^2(x_2^c, r_2)}{U_2^2(x_2^c, r_2)} \tag{9}$$

のように，限界代替率が二人の消費者の間で一致していないからである．このケースでは，消費者 1 の限界代替率よりも消費者 2 の限界代替率の方が大きい（同じ量の財を得るのであっても消費者 2 の方がそれと引き換えに支払ってもよい余暇の量が多い）．したがって，財を消費者 1 から消費者 2 に移転し，その代わりに余暇を消費者 2 から消費者 1 へ移転すれば，パレート改善となるはずである．実際，例えば

$$(\tilde{x}_1^c, \tilde{r}_1, \tilde{x}_2^c, \tilde{r}_2, \tilde{z}_1, \tilde{x}_1^p, \tilde{z}_2, \tilde{x}_2^p) := (1, 3, 3, 2, 4, 2, 8, 2) \tag{10}$$

のような別の実現可能な配分によって，設問の配分はパレート改善される．

ii. $(x_1^c, r_1, x_2^c, r_2, z_1, x_1^p, z_2, x_2^p) = (4, 4, 0, 0, 4, 2, 8, 2)$
（解答）パレート効率的でない．というのも，

$$c_1'(x_1^p) = 4w < 8w = c_2'(x_2^p) \tag{11}$$

のように，限界費用が二つの企業の間で一致していないからである．このケースでは，企業 1 の限界費用よりも企業 2 の限界費用の方が大きい（同じ量の財を生産するのであっても企業 2 の方が多くの労働力を必要とする）．したがって，企業 2 の生産の一部を企業 1 に委託することによって，経済全体で生産量を維持しながら必要な労働力を減らすことができるはずである．実際，生産パターンを $(z_1, x_1^p, z_2, x_2^p) = (4, 2, 8, 2)$ から $(z_1, x_1^p, z_2, x_2^p) = (64/9, 8/3, 32/9, 4/3)$ に変更することで，経済全体で 4 単位の財を生産しながら労働時間を 4/3 単位減らすことができる（余暇を 4/3 単位増やすことができる）．したがって，設問の配分は

$$(\tilde{x}_1^c, \tilde{r}_1, \tilde{x}_2^c, \tilde{r}_2, \tilde{z}_1, \tilde{x}_1^p, \tilde{z}_2, \tilde{x}_2^p) := (4, 16/3, 0, 0, 64/9, 8/3, 32/9, 4/3) \tag{12}$$

のような別の実現可能な配分によってパレート改善される．

iii. $(x_1^c, r_1, x_2^c, r_2, z_1, x_1^p, z_2, x_2^p) = (4, 16/3, 0, 0, 64/9, 8/3, 32/9, 4/3)$
（解答）パレート効率的でない．消費者の限界代替率が経済全体の限界

変形率に一致していないからである．消費者 1 の限界代替率は

$$\frac{U_1^1(x_1^c, r_1)}{U_2^1(x_1^c, r_1)} = \frac{5}{3} \tag{13}$$

である一方で，限界変形率はそれよりも大きい 16/3 である（限界変形率については次の設問の解答を参照）．これは，財を生産することに対する消費者の支払意思額（それと引き換えに諦めてもよい余暇の量）よりも財を生産することの機会費用（それと引き換えに諦めてしまっている余暇の量）の方が多いことを意味する．したがってこの場合，財の生産量を減らし，その代わりに余暇の量を増やすことによって，パレート改善を達成できるはずである．実際，例えば

$$(\tilde{x}_1^c, \tilde{r}_1, \tilde{x}_2^c, \tilde{r}_2, \tilde{z}_1, \tilde{x}_1^p, \tilde{z}_2, \tilde{x}_2^p) := (3, 10, 0, 0, 4, 2, 2, 1) \tag{14}$$

のような別の実現可能な配分を考えると，この配分は設問の配分をパレート改善することが分かる．

iv. $(x_1^c, r_1, x_2^c, r_2, z_1, x_1^p, z_2, x_2^p) = (2/3, 16/3, 7/3, 14/3, 4, 2, 2, 1)$

（解答）パレート効率的な配分である．これは，次のようにして確認することができる．

A. まず，

$$\frac{U_1^1(x_1^c, r_1)}{U_2^1(x_1^c, r_1)} = \left.\frac{r_1}{2x_1^c}\right|_{(x_1^c, r_1)=(2/3, 16/3)} = 4 \tag{15}$$

かつ

$$\frac{U_1^2(x_2^c, r_2)}{U_2^2(x_2^c, r_2)} = \left.\frac{2r_2}{x_2^c}\right|_{(x_2^c, r_2)=(7/3, 14/3)} = 4 \tag{16}$$

であるから，二人の消費者の限界代替率がいずれも 4 で一致していることが分かる．これは，財と余暇の分配について無駄がないことを意味する．

B. 次に，

$$c_1'(x_1^p) = 2wx_1^p\big|_{x_1^p=2} = 4w \tag{17}$$

かつ

$$c_2'(x_2^p) = 4wx_2^p\big|_{x_2^p=1} = 4w \tag{18}$$

であるから，二つの企業の限界費用が一致していることが分かる．これは，各企業が無駄のない方法で生産を分担していることを意味する．

C. 最後に，この経済の限界変形率が各消費者の限界代替率に一致していることを確認する．そのためには，この経済の生産可能性フロンティアを導出する必要がある．まず，経済全体で暫定的に $R \leq 2\bar{z}$ だけの余暇を確保したとしよう．すると，経済全体で労働に用いることのできる時間は $2\bar{z} - R$ である．この $2\bar{z} - R$ 時間を使って経済全体で最も多くの財を生産することを考えると，上の設問と同じ手続

きから，その 2/3 を企業 1 に割り当て，一方でその 1/3 を企業 2 に割り当てるのがよいことが分かる．このとき，最大化された経済全体の生産量は

$$f_1\left(\frac{2}{3}(2\bar{z}-R)\right)+f_2\left(\frac{1}{3}(2\bar{z}-R)\right)=\underbrace{\left(3\bar{z}-\frac{3}{2}R\right)^{1/2}}_{=:F(R)} \tag{19}$$

である．これはつまり，経済全体で R 時間の余暇を確保したとき，最大でも合計 $F(R)=\left(3\bar{z}-\frac{3}{2}R\right)^{1/2}$ 単位の財しか生産できなくなるということを意味する．この関数 $F(R)$ の逆関数を $G(X)$ と置こう．つまり

$$\begin{aligned} X=F(R) &\iff X=\left(3\bar{z}-\frac{3}{2}R\right)^{1/2} \\ &\iff R=\underbrace{2\bar{z}-\frac{2}{3}X^2}_{=:G(X)} \end{aligned} \tag{20}$$

である．これはつまり，経済全体で X 単位の財を生産しようとすれば，最大でも合計 $G(X)=2\bar{z}-\frac{2}{3}X^2$ 時間の余暇しか利用できなくなるということを意味する．（ちなみに，これが講義ノートので導出過程を示さずに与えた生産可能性フロンティアの式である．）したがってこの経済の限界変形率は

$$|G'(X)|=\frac{4}{3}X \tag{21}$$

のように計算できる．経済全体で $X=x_1^p+x_2^p=2+1=3$ 単位の財が生産されている場合，限界変形率は

$$|G'(X)|\Big|_{X=3}=\frac{4}{3}3=4 \tag{22}$$

であり，消費者の限界代替率に一致する．これは，経済全体で必要な財が必要なだけ生産されていることを意味する．

以上から，この配分はパレート効率的な配分である．