宿題 3 の解答

June 19, 2018

1. 次の記述のそれぞれについて，内容の正誤を答えなさい．

   (a) 生産集合とは，実現可能な生産量を列挙したものである．F

   (b) 経済学が想定する企業は，売上を最大化するように意思決定を行う．F

   (c) 生産関数とは，要素投入量に生産量を結びつける関数である．T

   (d) 費用関数とは，生産量に生産費用を結びつける関数である．T

   (e) 生産関数から費用関数を導き出すことはできるが，逆に費用関数から生産関数を導き出すことはできない．F

   (f) 限界費用とは，生産技術を限界まで活用したときの費用である．F

   (g) 企業は限界費用が財価格を下回るように供給量を決定する．F

   (h) 供給関数は限界費用関数の逆関数にほかならない．T

2. ある企業の技術が生産関数 $x = f(z) := z^{2/3}$ によって代表されているとする．ただしここで，x は財の生産量，z は生産要素の投入量を表わす．財価格を p，生産要素価格を w として，次の設問に答えなさい．

   (a) この企業の利潤最大化問題を解き，要素需要関数 $z^d(w, p)$ を求めなさい．

   （解答）企業の利潤は

   $$\pi(z) := pf(z) - wz \tag{1}$$

   であるから，利潤を最大にする要素投入量を z^* と置くと

   $$\begin{aligned} \pi'(z^*) = 0 &\iff (pf(z) - wz)'|_{z=z^*} = 0 \\ &\iff pf'(z^*) = w \end{aligned} \tag{2}$$

   が成立するはずである．生産関数は $f(z) = z^{2/3}$ で与えられていたから，$f'(z) = (2/3)z^{-1/3}$ であり，したがって (2) は

   $$p\frac{2}{3}(z^*)^{-\frac{1}{3}} = w \iff z^* = \left(\frac{2p}{3w}\right)^3 \tag{3}$$

   となる．ゆえに要素需要関数は

   $$z^d(w, p) = \left(\frac{2p}{3w}\right)^3 \tag{4}$$

   である．

   (b) この企業の供給関数 $x^s(w, p)$ を求め，そのグラフを作図しなさい．

（解答）この企業は，$z^d(w,p)$ だけの生産要素を投入し，$f(z^d(w,p))$ だけの財を生産する．直前の設問から，生産要素関数は (4) のように求められるから供給関数は

$$x^s(w,p) = f(z^d(w,p)) = \left(\left(\frac{2p}{3w}\right)^3\right)^{2/3} = \left(\frac{2p}{3w}\right)^2 \tag{5}$$

である．

(c) 生産関数 $f(z)$ の逆関数 $C(x)$ を求め，その上でこの企業の費用関数 $c(x) := wC(x)$ を求めなさい．

（解答）生産関数 $f(z)$ の逆関数を求めるには，$f(z) = x$ を z について解けば良い．つまり，

$$\begin{aligned} f(z) = x &\iff z^{2/3} = x \\ &\iff z = \underbrace{x^{3/2}}_{=:C(x)} \end{aligned} \tag{6}$$

であるから，$f(z)$ の逆関数は $C(x) = x^{3/2}$ である[1]．したがって，この企業の費用関数は

$$c(x) = wC(x) = wx^{3/2} \tag{9}$$

である．

(d) 上で求めた費用関数 $c(x)$ を用いて，

i. この企業の利潤 $px - c(x)$ を最大にする生産量 x を計算しなさい．

（解答）利潤を最大にする生産量を x^* と置くと

$$(px - c(x))'|_{x=x^*} = 0 \iff p = c'(x^*) \tag{10}$$

が成立するはずである（つまり，限界費用が価格に一致しているはずである）．費用関数は $c(x) = wx^{3/2}$ で与えられていたから，限界費用は $c'(x) = w(3/2)x^{1/2}$ であり，したがって (10) は

$$p = w\frac{3}{2}(x^*)^{1/2} \iff x^* = \left(\frac{2p}{3w}\right)^2 \tag{11}$$

[1] この $C(x)$ が $f(z)$ の逆関数になっていることは

$$C(f(z)) = (f(z))^{3/2} = \left(z^{2/3}\right)^{3/2} = z \tag{7}$$

が成立することからも確認できる．ちなみに，$f(z)$ の逆関数が $C(x)$ であることは，$C(x)$ の逆関数は $f(z)$ であることも意味する．実際，この例では

$$f(C(x)) = (C(x))^{2/3} = \left(x^{3/2}\right)^{2/3} = x \tag{8}$$

が成立するので，$f(z)$ は $C(x)$ の逆関数である．

となる．ゆえに供給関数は

$$x^s(w,p) = \left(\frac{2p}{3w}\right)^2 \tag{12}$$

である．

ii. この企業の限界費用関数 $c'(x)$ を求め，そのグラフを作図しなさい．また，それが供給関数 $x^s(w,p)$ のグラフとどのような関係にあるか説明しなさい．
（解答）供給関数は限界費用関数の逆関数なので，限界費用関数のグラフは供給関数のグラフを 45 度線で折り返したものになる．

3. 二つの企業からなる経済を考えよう．企業 $j \in \{1,2\}$ の生産技術は, それぞれ $c_1(x_1) = w2x_1^{3/2}$ と $c_2(x_2) = w4x_2^{3/2}$ のような費用関数によって代表されているとする．財価格を p，賃金率を w で表わす．

(a) 各企業について, 供給関数 $x_j^s(w,p)$, および労働需要関数 $z_j^d(w,p)$ を求めなさい．
（解答）いずれの企業についても，利潤を最大にする生産量を x_j^* とおくと，

$$p = c'(x_j^*) \quad \forall j \in \{1,2\} \tag{13}$$

が成立しているはずである．また，この x_j^* を生産するための費用（賃金 × 労働投入）は $c_j(x_j^*)$ であるから，投入される労働 z_j^* は

$$wz_j^* = c_j(x_j^*) \iff z_j^* = \frac{c_j(x_j^*)}{w} \quad \forall j \in \{1,2\} \tag{14}$$

を満たす．企業 1 について (13) を考えると

$$p = w3(x_1^*)^{1/2} \iff x_1^* = \frac{1}{9}\left(\frac{p}{w}\right)^2, \tag{15}$$

企業 2 については

$$p = w6(x_2^*)^{1/2} \iff x_2^* = \frac{1}{36}\left(\frac{p}{w}\right)^2 \tag{16}$$

のように解けるから，それぞれの供給関数は

$$x_1^s(w,p) = \frac{1}{9}\left(\frac{p}{w}\right)^2, \quad x_2^s(w,p) = \frac{1}{36}\left(\frac{p}{6w}\right)^2. \tag{17}$$

となる．また (14) から，労働需要関数は

$$z_1^d(w,p) = \frac{c_1(x_1^s(w,p))}{w} = \frac{2}{27}\left(\frac{p}{w}\right)^3, \tag{18}$$

$$z_2^d(w,p) = \frac{c_2(x_2^s(w,p))}{w} = \frac{1}{54}\left(\frac{p}{w}\right)^3, \tag{19}$$

のように求められる．

(b) 経済全体の集計供給関数 $X^s(w,p)$ とその逆供給関数 $p^s(X)$ を求めなさい．

（解答）それぞれの企業の供給関数は (17) であるから，この経済における集計供給関数は

$$\begin{aligned} X^s(w,p) &= \sum_{j=1}^{2} x_j^s(w,p) \\ &= \frac{1}{9}\left(\frac{p}{w}\right)^2 + \frac{1}{36}\left(\frac{p}{w}\right)^2 \\ &= \end{aligned} \tag{20}$$

である．逆供給関数 $p^s(X)$ を求めるには，$X^s(w,p) = X$ を p について解けば良いから

$$\begin{aligned} X^s(w,p) = X &\iff \frac{5}{36}\left(\frac{p}{w}\right)^2 = X \\ &\iff p = \underbrace{w\left(\frac{36}{5}X\right)^{1/2}}_{=p^s(X)} \end{aligned} \tag{21}$$

である．

(c) 経済全体の集計労働需要関数 $Z^d(w,p)$ を求めなさい．

（解答）それぞれの企業の労働需要関数は (18) であるから，この経済における集計労働需要関数は

$$\begin{aligned} Z^d(w,p) &= \sum_{j=1}^{2} z_j^d(w,p) \\ &= \frac{2}{27}\left(\frac{p}{w}\right)^3 + \frac{1}{54}\left(\frac{p}{w}\right)^3 \\ &= \frac{5}{54}\left(\frac{p}{w}\right)^3 \end{aligned} \tag{22}$$

である．