宿題の解答

May 29, 2018

1. 次の記述のそれぞれについて，内容の正誤を答えなさい．

   (a) 経済学における意思決定のモデルは，「人は社会全体にとって望ましい選択肢を選ぶ」というものである．F

   (b) 選択肢の集合が変化しても，選ばれる選択肢が変化するとは限らない．T

   (c) 財の価格が変化すると，予算線は傾きを維持しながら並行に移動する．F

   (d) 選好を代表する効用関数はひとつだけ存在する．F

   (e) 消費者の効用関数の値が 2 倍になったとき，2 倍幸せになる．F

   (f) ある財に関する限界効用とは，その財の消費を少しだけ増やしたときの効用関数の増加分を表わすものと解釈できる．T

   (g) ある消費者の無差別曲線は，その消費者にとって同程度に好ましい選択肢を集めたものである．T

   (h) 限界代替率は，無差別曲線の接線の傾き（の絶対値）に等しい．T

   (i) 需要関数とは，所得や財価格と財の需要量との関係を表わすものである．T

2. 次の設問に答えなさい．

   (a) ある消費者の選好が，

$$U(x_1, x_2) = x_1^{1/3} x_2^{2/3} \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_{++} \tag{1}$$

なる効用関数によって代表されているとする．同一の選好を表現する別の効用関数を挙げなさい．

（解答）例えば，関数 $\tilde{U}(x_1, x_2)$ を

$$\tilde{U}(x_1, x_2) := x_1 x_2^2 = \left(x_1^{1/3} x_2^{2/3}\right)^3 = (U(x_1, x_2))^3$$

のように定義する．すると，べき関数が単調増加関数であることに注意すれば，

$$\begin{aligned} U(x_1', x_2') \geq U(x_1, x_2) &\iff \left(U(x_1', x_2')\right)^3 \geq (U(x_1, x_2))^3 \\ &\iff \tilde{U}(x_1', x_2') \geq \tilde{U}(x_1, x_2) \end{aligned}$$

を満たすことが分かるので，この $\tilde{U}(x_1, x_2)$ は (1) で定義される $U(x_1, x_2)$ と同一の選好を表現するものであると結論できる．

あるいは別の例として，関数 $\hat{U}(x_1, x_2)$ を

$$\hat{U}(x_1, x_2) := \frac{1}{3}\ln(x_1) + \frac{2}{3}\ln(x_2) = \ln\left(x_1^{1/3} x_2^{2/3}\right) = \ln\left(U(x_1, x_2)\right)$$

のように定義する．すると，対数関数が単調増加関数であることに注意すれば，

$$\begin{aligned} U(x_1', x_2') \geq U(x_1, x_2) &\iff \ln\left(U(x_1', x_2')\right) \geq \ln\left(U(x_1, x_2)\right) \\ &\iff \hat{U}(x_1', x_2') \geq \hat{U}(x_1, x_2) \end{aligned}$$

を満たすことが分かるので，この $\hat{U}(x_1, x_2)$ も (1) で定義される $U(x_1, x_2)$ と同一の選好を表現するものである．

これらの例から分かるように，一般に，ある効用関数が選好を代表している時，その効用関数を単調関数で変換したものも同一の選好を代表する．

(b) 消費者の効用関数が (1) で与えられているとき，

i. 限界代替率 $U_1(x_1, x_2)/U_2(x_1, x_2)$ を求めなさい．

（解答）限界効用は

$$U_1(x_1, x_2) = \frac{1}{3} x_1^{-2/3} x_2^{2/3}, \quad U_2(x_1, x_2) = \frac{2}{3} x_1^{1/3} x_2^{-1/3}$$

と計算できるので，限界代替率は

$$\frac{U_1(x_1, x_2)}{U_2(x_1, x_2)} = \frac{\frac{1}{3} x_1^{-2/3} x_2^{2/3}}{\frac{2}{3} x_1^{1/3} x_2^{-1/3}} = \frac{x_2}{2x_1} \tag{2}$$

である．

ii. 需要関数 $x_1^d(p_1, p_2, M)$，$x_2^d(p_1, p_2, M)$ を求めなさい．

（解答）需要される財の組み合わせを (x_1^*, x_2^*) と置くと

$$\frac{U_1(x_1^*, x_2^*)}{U_2(x_1^*, x_2^*)} = \frac{p_1}{p_2} \tag{3}$$

かつ

$$p_1 x_1^* + p_2 x_2^* = M \tag{4}$$

を満たすはずである．(3) は，(2) を用いることで

$$\frac{x_2^*}{2x_1^*} = \frac{p_1}{p_2} \iff p_1 x_2^* = 2 p_1 x_1^* \tag{5}$$

のように書けるので，これと (4) とを合わせることで

$$p_1 x_1^* + 2 p_1 x_1^* = M \iff x_1^* = \frac{M}{3p_1}$$

と計算できる．さらに，いま求めた x_1^* を (5) に代入すれば

$$p_1 x_2^* = 2 p_1 \frac{M}{3p_1} \iff x_2^* = \frac{2M}{3p_2}$$

を得る．したがって，需要関数は

$$\left(x_1^d(p_1, p_2, M), x_2^d(p_1, p_2, M)\right) = \left(\frac{M}{3p_1}, \frac{2M}{3p_2}\right) \tag{6}$$

である．

(c) 消費者の効用関数が

$$U(x_1, x_2) = \frac{1}{3}\ln(x_1) + \frac{2}{3}\ln(x_2) \quad \forall(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_{++} \tag{7}$$

で与えられているとき，

i. 限界代替率 $U_1(x_1, x_2)/U_2(x_1, x_2)$ を求めなさい．

ii. 需要関数 $x_1^d(p_1, p_2, M)$，$x_2^d(p_1, p_2, M)$ を求めなさい．

（解答）既に上で確認したように，(7) で定義される $U(x_1, x_2)$ は，(1) で定義される効用関数と同一の選好を表現する．この事実から直ちに，限界代替率と需要関数が，それぞれ (2) と (6) に一致することが言える．というのも，同一の選好を違う効用関数を用いて表現しているだけなので，ランキングの順序自体に何ら変わりはなく，同じ選択肢の集合を考えた場合には全く同じ財の組み合わせが需要されなければならないからである．

実際，限界効用を愚直に求めてみると

$$U_1(x_1, x_2) = \frac{1}{3x_1}, \quad U_2(x_1, x_2) = \frac{2}{3x_2} \tag{8}$$

であるから，限界代替率は

$$\frac{U_1(x_1, x_2)}{U_2(x_1, x_2)} = \frac{\frac{1}{3x_1}}{\frac{2}{3x_2}} = \frac{x_2}{2x_1} \tag{9}$$

となり，(2) に一致することが確認できる．一方の需要関数は，連立方程式

$$\frac{U_1(x_1^*, x_2^*)}{U_2(x_1^*, x_2^*)} = \frac{p_1}{p_2} \tag{10}$$

$$p_1 x_1^* + p_2 x_2^* = M \tag{11}$$

を (x_1^*, x_2^*) について解くことで求められる．明らかに，(10) の左辺（限界代替率）が前の問題と一致するならば，需要関数自体も前の問題と一致しなければならない．（また逆に，需要関数が前の問題と一致するためには，限界代替率も前の問題と一致していなければならない．）

この例だけでは納得できない人は, 例えば効用関数を $U(x_1, x_2) = x_1 x_2^2$ として，その場合の限界代替率や需要関数を自分で求めてみるとよい．この $U(x_1, x_2)$ も同一の選好を代表する（また別の）効用関数なので，全く同じ限界代替率と需要関数が導かれるはずである．

ちなみに，試験対策的なテクニックを述べておくと，限界代替率や需要関数を求める際には，効用関数を単調関数で変換し，「解きやすい」関数に直した上で問題を解いて構わない．例えば $U(x_1, x_2) = x_1^{1/3} x_2^{2/3}$ のような与えられた効用関数をそのまま使う必要はなく，同じ選好を代表する別の効用関数を自分で考えて（例えば $U(x_1, x_2) = x_1 x_2^2$ とした場合の方が「解きやすい」と感じる人もいるだろう），その効用関数を用いて問題を解いてよいのである．