生産者理論入門*

阪本 浩章†

初稿：July 3, 2015　改訂：June 13, 2018

Contents

*この講義ノートは，ミクロ経済学を初めて学ぶ学部一年生向けに書かれたものである．ただ，別途配布した数学補論の内容を理解している（あるいはそれと同等の背景知識を既に得ている）ことを前提とした．

†千葉大学法政経学部 (hsakamoto@chiba-u.jp)

このノートで学ぶこと

- 生産技術
  - 技術：生産集合，生産関数，あるいは費用関数によって表現される
  - 生産集合 Y：実現可能な生産パターンを全て列挙したもの
  - 生産関数 $f(z)$：一定の生産要素 z からどれだけの生産物を作れるか
  - 費用関数 $c(x)$：一定の生産物 x を作るのにどれだけの費用が必要か
  - $f(z)$ の逆関数 $C(x)$ に要素価格 w を掛けたものが費用関数 $c(x) = wC(x)$
- 企業の意思決定
  - 企業は利潤を最大化するように生産パターン $(z, x) \in Y$ を選ぶ
  - 利潤最大化問題：$Y \subset \mathbb{R}^2_+$ という技術を持つ企業は

$$(z^*, x^*) \in \underset{(z,x)\in Y}{\operatorname{argmax}} \{px - wz\} \tag{1}$$

    を満たすような (z^*, x^*) を選ぶ
  - 企業が選ぶ生産パターン (z^*, x^*) は財価格 p や生産要素価格 w に依存する．生産要素の投入量 z^* を (w, p) の関数と見たものを要素需要関数，生産物の産出量 x^* を (w, p) の関数と見たものを供給関数と呼ぶ
- 要素需要関数と供給関数
  - 生産関数 $f(z)$ を用いれば，(1) は

$$z^* \in \underset{z\in\mathbb{R}_+}{\operatorname{argmax}}\{pf(z) - wz\} \quad \text{and} \quad x^* = f(z^*)$$

    に等しく，したがって (z^*, x^*) は次の連立方程式を解く：

$$pf'(z^*) = w \quad \text{and} \quad x^* = f(z^*) \tag{2}$$

  - 費用関数 $c(x)$ を用いれば，(1) は

$$x^* \in \underset{x\in\mathbb{R}_+}{\operatorname{argmax}}\{px - c(x)\} \quad \text{and} \quad z^* = c(x^*)/w$$

    に等しく，したがって (z^*, x^*) は次の方程式を解く：

$$p = c'(x^*) \quad \text{and} \quad z^* = c(x^*)/w \tag{3}$$

  - 供給関数は限界費用関数の逆関数になる（これは (3) による）

1　生産者の意思決定モデル

経済学では，生産（production）という言葉を非常に広い意味で用いる．工場で労働者を雇ってボールペンを製造するのはもちろん生産であるが，例えば自動車とドライバーを用いて輸送サービスを提供することも，同様に生産と呼ばれる．あるいは，シェフが食材と調理器具を使って料理を作ることも生産活動の一種と見なされる．要は「何かを用いて何かを生み出す活動」を生産と呼ぶのである．そして，前者の「何か」のことを生産要素（production factor）と呼び，後者の「何か」を生産物（product）と呼ぶ．我々の目的は，生産に関する意思決定を数学を用いて記述することである．

1.1　生産技術

生産という言葉がそうであるように，生産技術（technology）という言葉も，経済学では通常よりも広い意味で用いられる．物理的な財を産み出すための工学的な手法はもちろんのこと，大量の荷物を一定時間内に配達するノウハウや，食材に応じて手際良く料理を作る匠の業も，ここで言うところの生産技術に含まれる．このような意味での生産技術を，我々は「その技術の下でどのような生産パターンが可能となるのか」を記述することによって表現する．

　具体的な例として，労働者を雇ってトマトを栽培する農園を考えよう．この農園では，労働者に毎日 4 時間（半日）の農作業に従事してもらえば一年間に 2 トンのトマトを生産できる．あるいは 9 時間（丸一日）の労働によって，年間生産量を 3 トンに増産することも可能である．また，やろうと思えば，毎朝 1 時間の手入れだけでも 1 トンの年間生産量は固いという．この時，この農園の経営者が選ぶことのできる「労働投入量とトマト生産量のペア」は

$$Y := \{(0,0),(1,1),(4,2),(9,3)\} \tag{4}$$

という $\mathbb{R}^2_+$ の部分集合によって表現することができよう[1]．このような，ある生産技術の下で選ぶことのできる投入量と産出量のペア[2]を集めたものを，生産集合（production set）と呼ぶ．生産集合は，技術的に実現可能な生産パターンを全て列挙したものと考えてよい．生産集合が Y で与えられている時，例えば労働時間 z を投入してトマトを x だけ生産することが技術的に可能（feasible）であるという事実は，$(z,x) \in Y$ のように表記することができる．逆に，労働時間 z を投入し

[1]農作業を全く行なわない（つまりは労働時間を 0 にする）という選択もあり得るので，$(0,0)$ というペアを選択肢の一つに加えた．また，生産した財を費用をかけずに廃棄できるならば（つまりトマトを大量に捨てても誰からも怒られないのであれば），Y には $(1,0)$ や $(4,0)$, $(4,1)$, $(9,0)$, $(9,1)$, $(9,2)$ といったペアも含まれる．ただ通常はそのような生産パターンは選択されないので，(4) のような Y を考えれば十分である．

[2]投入量と産出量からなるペア（ベクトル）のことを，生産計画（production plan）と呼ぶこともある．

てもトマトを x だけ生産することができない（infeasible）場合には，$(z,x) \notin Y$ のように表記されよう．(4) の例では，$(4,2) \in Y$ なので $(z,x) = (4,2)$ という生産パターンは技術的に選択可能であるが，$(4,4) \notin Y$ なので $(z,x) = (4,4)$ というパターンは選択不可能である．

当然ながら，ある技術の下では不可能な生産パターンであっても，他の技術の下では可能になる場合もある．例として，先程とは別のトマト農園を考えよう．こちらの農園では，トマト栽培に関する優れたノウハウが蓄積されていると仮定する．するとこの農園の生産技術は，例えば

$$\tilde{Y} := \{(0,0),(1,2),(4,4),(9,6)\} \tag{5}$$

のような生産集合によって表現することができるだろう．先程の Y という生産技術の下では，$(z,x) = (4,4)$ という生産パターンは選択不可能であった．一方，$\tilde{Y}$ が表現する生産技術の下ではそれが可能となる．つまりこの農園では，4 時間の労働投入で年間 4 トンのトマトを栽培することができる．あるいは労働者に 9 時間働いてもらえば，生産量を 6 トンに増やすことも可能である．同じ 2 トンの年間生産量を実現するのでも，先程の農園では 4 時間の労働が必要であったが，この農園では毎朝 1 時間の手入れだけでで済んでしまう．このように，生産技術の違いは生産集合の違いによって表現することができる．

1.2　生産者の意思決定

生産者の意思決定モデルは，消費者のそれと大きく変わるものではない．我々は生産者についても，「選び得る選択肢の中からその生産者にとって最も好ましいもが選択される」と考える．消費者の場合，選択肢の集合は予算集合と呼ばれるものによって表現されていた．生産者にとっては，生産集合が選択肢の集合である．つまり，生産集合に含まれるものであれば，生産者はどのような投入量と産出量のパターンも選ぶことができる．したがって意思決定のモデルとしては，生産集合に含まれる選択肢の中から，生産者にとって一番「好ましい」生産パターンが選ばれる，と考えるのが自然であろう．

もっとも，生産者にとって何が「好ましい」ものであるかは必ずしも自明でない．トマトを家庭菜園で栽培する生産者であれば，家族で食べる分だけを必要最小限の費用で生産するのが好ましいということになるだろう．あるいは，スペインのトマト投げ祭の準備を任された農家であれば，採算度外視で可能な限り大量のトマトを生産したいと思うかもしれない．潜在的には，生産者ごとに様々な好ましさの基準が考えられてよい．その中で，経済学の生産者理論がもっぱら分析の対象とするのは，「利潤の最大化」を目的とするような生産者である．つまり経済学では，与えられた技術の下で実現可能な生産パターンの中から，自らの利潤を最大にする選択肢を選ぶような生産者を考える．そのような生産者のことを，我々

は企業（firm）と呼ぶ．

利潤（profit）とは，収益（revenue）から費用（cost）を減じたものである．例えば，ある企業が z だけの生産要素を投入して，x だけの生産物を生産・販売したとしよう．生産要素の単位価格を w，生産物の単位価格を p で表わせば，この時の利潤は

$$px - wz \tag{6}$$

となる．ここで px と wz は，収益と費用をそれぞれ表わす．したがって，利潤の最大化を目的とする企業の意思決定は，次のように表現できるだろう．つまり，$Y \subset \mathbb{R}^2_+$ という生産集合を持つ企業は

$$px^* - wz^* \geq px - wz \quad \forall (z, x) \in Y \tag{7}$$

を満たすような $(z^*, x^*) \in Y$ を選ぶ．さらにここで，関数 $\pi : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ を

$$\pi(z, x) := px - wz \quad (z, x) \in \mathbb{R}^2_+ \tag{8}$$

で定義すれば，(7) は

$$(z^*, x^*) \in \operatorname*{argmax}_{(z,x) \in Y} \pi(z, x) \tag{9}$$

のように，関数の最大化問題として書き換えることができる．このような問題を利潤最大化問題（profit maximization problem）と呼び，(9) を満たす (z^*, x^*) をその解と呼ぶ．つまり利潤最大化問題の解は，生産集合 Y 上で関数 π の最大値を与えるものに他ならない．

明らかに，利潤最大化問題の解は生産要素価格 w や生産物価格 p によって変わってくる．具体的な例として，ある企業の生産集合 Y が (4) で与えられている場合を考えよう．この時，例えば生産要素価格と生産物価格が $(w, p) = (1, 4)$ であれば，

$$\pi(0, 0) = 0, \quad \pi(1, 1) = 3, \quad \pi(4, 2) = 4, \quad \pi(9, 3) = 3 \tag{10}$$

と計算できるから，利潤最大化問題の解は $(z^*, x^*) = (4, 2)$ である．一方，価格ベクトルが $(w, p) = (2, 12)$ に変化したとすると，各生産パターンに対応する利潤は

$$\pi(0, 0) = 0, \quad \pi(1, 1) = 10, \quad \pi(4, 2) = 16, \quad \pi(9, 3) = 18 \tag{11}$$

のように変わる．したがって, この企業によって選択される生産パターンは $(z^*, x^*) = (9, 3)$ となる．この例が端的に示すように，企業の生産パターンは生産物価格と生産要素価格に依存する．これは言い換えれば，企業によって選ばれる生産要素の投入量 z^* と生産物の産出量 x^* とが，いずれも価格ベクトル (w, p) の関数になるということである．生産要素の投入量 z^* を (w, p) の関数と見なしたものを，要素

需要関数（factor demand function）と呼ぶ．同様に，生産物の産出量 x^* を (w,p) の関数と見なしたものを供給関数（supply function）と呼ぶ．

2　生産関数と費用関数

消費者理論の主要な課題が需要関数を特徴付けることにあったように，生産者理論では，我々は要素需要関数と供給関数を特徴付けることになる．つまり，(9) で与えられる利潤最大化問題の解が，生産要素価格 w や生産物価格 p の値によってどのように変化するのかを検討することが，我々の次なる目的である．

この目的は，異なる二通りの方法によって達成することができる．いずれの方法も，企業の生産技術を「何らかの関数」によって表現することで，(9) の利潤最大化問題をより解き易い形に書き換えるものである．一つ目の方法では生産関数によって，二つ目の方法では費用関数によって，生産技術を表現することになる．生産関数は，「ある一定の生産要素を投入することでどれだけ多くの生産物を作ることができるか」という観点から生産者の技術を特徴付ける．一方の費用関数は，逆に「ある一定の生産物をどれだけ少ない費用で作ることができるか」という観点から生産技術を特徴付ける．

2.1　生産関数

前節で我々は，生産技術を生産集合と呼ばれる集合によって表現した．つまり，その技術の下で実現可能な生産パターンを列挙することで（これは実現不可能な生産パターンを列挙することでもある），生産技術を特徴付けるというやり方である．生産集合による生産技術の特徴付けは，生産者の意思決定をフォーマルに記述するための最も一般性の高い方法である．ただ多くの場合，生産技術は生産関数（production function）と呼ばれる関数によっても特徴付けることができる．

生産関数とは，生産要素の投入量 z に対して，それによって産出できる最大の生産量 $f(z)$ を対応させるような関数 f のことである．あるトマト農園の生産技術が生産関数 f によって表現されるとき，それは例えば，「労働時間を z' だけ投入すれば一年間に $f(z')$ だけのトマトを生産できるが，もう少し頑張って労働時間を $z'' > z'$ に増やすことで，トマトの年間生産量を $f(z'') > f(z')$ に増産することができる」とったことを意味する．

生産関数は，生産集合の関数表現の一つであると解釈してもよい．つまり，

$$(z,x) \in Y \iff x = f(z) \tag{12}$$

がどのような $(z,x) \in \mathbb{R}^2_+$ についても成立する時，関数 f は生産集合 Y の関数表

現である，と言うことができる[3]．例えば，ある生産者の技術が (4) の生産集合 Y によって与えられているとする．ここで，Y 上で選択可能な生産要素の投入量を集めたものを $Z \subset \mathbb{R}_+$ で表わそう．すなわちこの例では

$$Z := \{0, 1, 4, 9\} \tag{16}$$

である．すると，この生産技術は

$$f(z) := z^{1/2} \quad \forall z \in Z \tag{17}$$

で定義される関数 $f : Z \to \mathbb{R}_+$ によっても特徴付けることができる．というのも，

$$(0, f(0)) = (0, 0), \quad (1, f(1)) = (1, 1), \quad (4, f(4)) = (4, 2), \quad (9, f(9)) = (9, 3)$$

がいずれも Y に含まれる（つまりは実現可能な生産パターンである）からである．あるいは，(5) の生産集合 Y' によって与えられる生産技術であれば，

$$\tilde{f}(z) := 2z^{1/2} \quad \forall z \in Z \tag{18}$$

という別の関数 $\tilde{f} : Z \to \mathbb{R}_+$ で特徴付けることができよう．したがって，生産技術の違いは，生産関数の違いによって表現することができる．

上の例では，話を簡単にするために，生産要素の投入量を $Z := \{0, 1, 4, 9\}$ の中からしか選択できないと仮定した．しかし現実には，もう少し柔軟に投入量を調整できると考えるべきであろう．労働者との交渉によって作業時間を 3 時間や 6 時間に調整するすることも可能であろうし，複数の労働者を雇用すれば，例えば一日に 36 時間分の労働を投入することもできるようになる．毎朝の手入れの時間を，1 時間と言わずに 1.5 時間という半端な時間に延長してもらうことも，あるいは無理な話ではない．したがって多くの場合，企業は生産要素の投入量を $Z := \mathbb{R}_+$ の中から自由に選択できると仮定される．そのような仮定の下での，典型的な生産関数の例を図 1 に示した．

生産関数を用いると，企業の利潤最大化問題 (9) を，次のように書き換えるこ

---

[3]ちなみに (12) は

$$Y = \{(z, x) \in \mathbb{R}^2_+ \mid x = f(z) \text{ for some } z \in \mathbb{R}_+\} \tag{13}$$

と表現することもできる．なお，生産した財を費用をかけずに廃棄できるならば（つまりトマトを大量に捨てても誰からも怒られないのであれば），(12) は

$$(z, x) \in Y \iff x \leq f(z), \tag{14}$$

したがって (13) は

$$Y = \{(z, x) \in \mathbb{R}^2_+ \mid x \leq f(z) \text{ for some } z \in Z\} \tag{15}$$

となる．

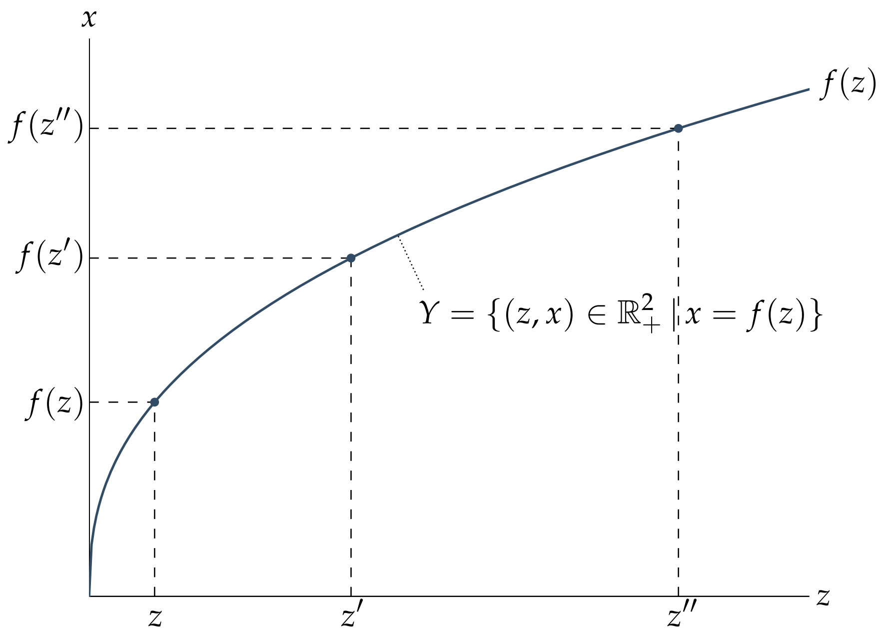

図 1: 生産技術の関数表現（生産関数）の例

とができる．つまり，ある企業の生産技術が生産関数 $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ によって代表されている時，その企業は，

$$z^*\in\underset{z\in\mathbb{R}_+}{\operatorname{argmax}}\{pf(z)-wz\} \tag{19}$$

を満たす生産要素 z^* を投入して

$$x^*=f(z^*) \tag{20}$$

なる x^* を生産する．生産関数によって要素投入量 z が生産量 $x=f(z)$ に結び付けられているので，利潤を最大化する要素投入量 $z^*\in\mathbb{R}_+$ を探すことで（つまりは (19) の最大化問題を解く z^* を見付けることで），利潤を最大にする生産量 $x^*=f(z^*)\in\mathbb{R}_+$ も自ずと求まるのである．

2.2　費用関数

生産技術の関数表現は，費用関数（cost function）と呼ばれる関数によっても可能である．費用関数とは，生産物の産出量 x に対して，それだけの産出量を実現するために必要となる最小の費用 $c(x)$ を対応させるような関数 c のことである．あるトマト農園の生産技術が費用関数 c によって表現されるとき，それは例えば，「この農園で x' だけのトマトを生産するためには最低でも $c(x')$ だけの費用が必要であり，さらに生産量を増やして $x''>x'$ だけのトマトを作るとなると，そのための

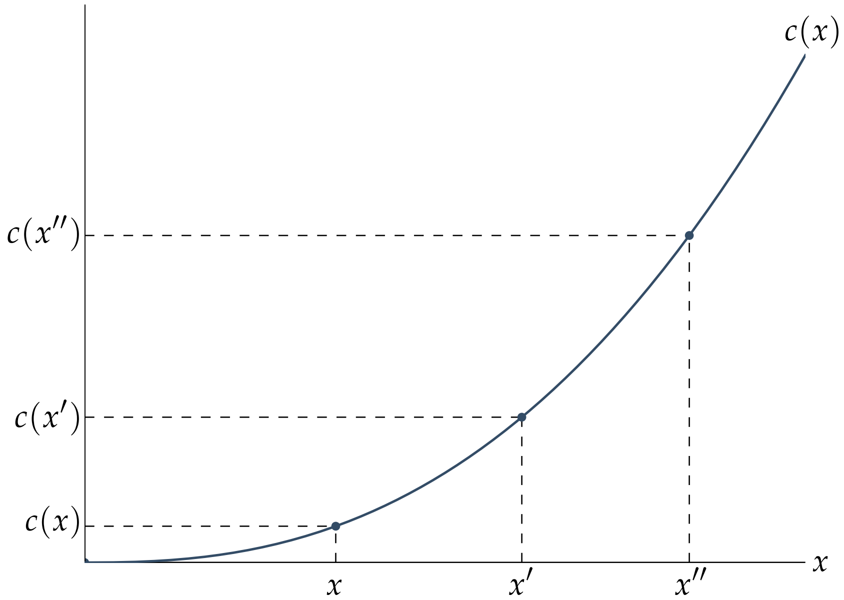

図 2: 生産技術の関数表現（費用関数）の例

費用は $c(x'') > c(x')$ に増えてしまう」とったことを意味する．図 2 は，典型的な費用関数を図示したものである．

具体的な例として，ある生産者の技術が (4) の生産集合 Y によって与えられている場合を考えよう．ここで，Y 上で選択可能な生産物の産出量を集めたものを $X \subset \mathbb{R}_+$ で表わそう．すなわちこの例では

$$X := \{0, 1, 2, 3\} \tag{21}$$

である．するとこの生産技術は，要素価格を w として，

$$c(x) := wx^2 \quad \forall x \in X \tag{22}$$

で定義される関数 $c : X \to \mathbb{R}_+$ によっても特徴付けることができる．というのも，Y に含まれる選択肢を見ると，生産物を x だけ産出するためには $z = x^2$ だけの要素投入が必要であり，その時の費用は wx^2 となる，という関係が存在するからである．あるいは，(5) の生産集合 Y' によって与えられる生産技術であれば，

$$\tilde{c}(x) := \frac{1}{4}x^2 \quad \forall x \in X \tag{23}$$

という別の関数 $\tilde{c} : X \to \mathbb{R}_+$ で特徴付けることができよう．したがって，生産技術の違いは，費用関数の違いによっても表現することができる．

費用関数を用いると，企業の利潤最大化問題 (9) を，次のように書き換えるこ

とができる．つまり，ある企業の生産技術が費用関数 $c : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ によって代表されている時，その企業は，

$$x^* \in \operatorname*{argmax}_{x \in \mathbb{R}_+} \{px - c(x)\} \tag{24}$$

を満たす x^* を生産し，そのために

$$z^* = c(x^*)/w \tag{25}$$

だけの生産要素を投入する．費用関数は，生産量 x と費用 $c(x)$ とを結び付けるものである．さらに，要素価格を w で表わせば，$c(x)$ だけの費用がかかったということは，それはとりもなおさず，$z = c(x)/w$ だけの要素投入が必要であったことを意味する．したがって，利潤を最大化する生産量 $x^* \in \mathbb{R}_+$ を探すことで（つまりは (24) の最大化問題を解く x^* を見付けることで)，利潤を最大にする要素投入量 $z^* = c(x^*)/w \in \mathbb{R}_+$ も自ずと求まるのである．

2.3 生産関数と費用関数との関係

企業の生産技術は，上で見たように，生産関数と費用関数という 2 つの異なる方法で特徴付けることができる．前者は「ある一定の生産要素を投入することでどれだけ多くの生産物を作ることができるか」という観点から，後者は「ある一定の生産物をどれだけ少ない費用で作ることができるか」という観点から，生産技術を特徴付けるものだった．当然ながら，2 つの方法の間には密接な関係がある[4]．

この点をより明確にするために，まずは生産関数から出発して，対応する費用関数を導出してみることにしよう．例えば，ある企業の生産技術が

$$f(z) = z^{1/3} \tag{26}$$

なる生産関数によって表現できるとする．つまりこの企業は，z だけの生産要素を投入することによって，$f(z) = z^{1/3}$ だけの生産物を産出することが可能である．たとえば，$z = 8$ 単位の生産要素を使うことで，$f(8) = 8^{1/3} = 2$ 単位の生産物を産出できるし，投入する生産要素の量を $z = 27$ 単位に増やせば，生産物の産出量を $f(27) = 27^{1/2} = 3$ 単位に増加させることもできる．これは逆に言えば，$x = 2$ 単位の生産物を産出するためには，$8 = 2^3$ 単位の生産要素を投入する必要があり（その時の費用は $w2^3$ である)，生産物の産出量を $x = 3$ 単位に増やすためには，生産要素の投入量を $27 = 3^3$ 単位まで増加させる必要があるということである（その時の費用は $w3^3$ になる)．同様の手続きを他の生産量と生産要素投入量の組につ

[4] ここでは生産要素がひとつしかないような単純なケースのみを扱っているが，生産関数と費用関数との関係は，生産要素の数が 2 つ以上である場合にも同様に妥当する．つまり，生産関数と費用関数は，企業の生産技術について（ほとんどの場合に）全く同じだけの情報を表現できる．

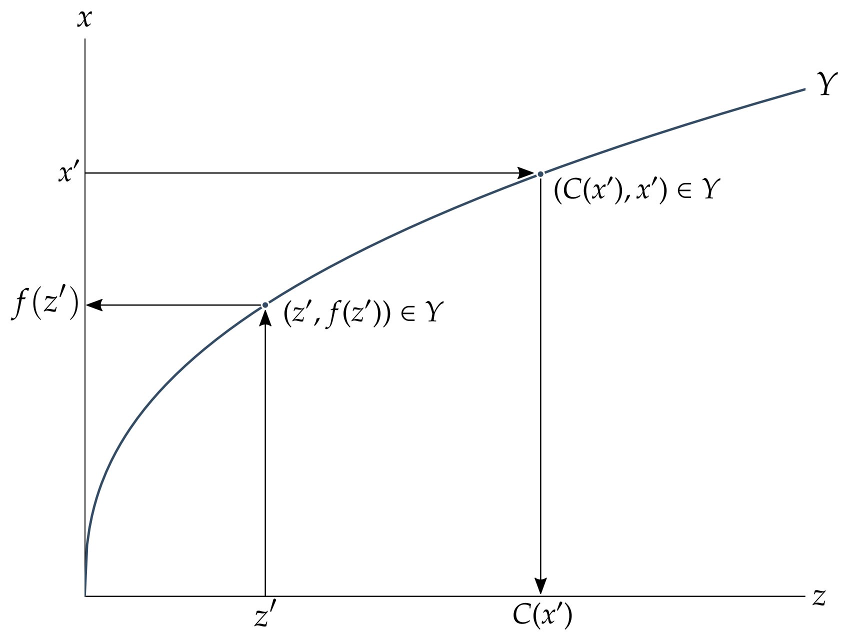

図 3: 生産関数 $f(z)$ とその逆関数 $C(x)$ との関係

いても行うことで，この企業の生産技術を表現する費用関数は

$$c(x) = wx^3 \tag{27}$$

であることが分かる．ここで，(27) における x^3 が (26) における $z^{1/3}$ の逆関数になっていることに注意しよう．これは決して偶然ではない．一般に，ある企業の生産技術が生産関数 $f(z)$ によって与えられている時，$f(z)$ の逆関数を $C(x)$ として，

$$c(x) = wC(x) \tag{28}$$

がその企業の費用関数となる[5]．生産関数 $f(z)$ は「z' だけの生産要素から $f(z')$ という量の生産物を生み出せる（つまり $(z', f(z')) \in Y$）」という関係を表わしていたのだから，その逆関数 $C(x)$ を考えることで「x' という量の生産物を産出するためには $C(x')$ だけの生産要素が必要である（つまり $(C(x'), x') \in Y$）」という逆方向の関係を表わすことができるのである．この関係は，図 3 からも明らかであろう．

これとは反対に，企業の費用関数の情報から出発して，その企業の生産関数を

[5]関数 $f(z)$ の逆関数とは

$$C(f(z)) = z \quad \forall z \in \mathbb{R}_+ \tag{29}$$

を満たすような関数 $C(x)$ のことである．幾何的には，関数 $f(z)$ のグラフを 45 度線を境界にして折り返したもの（つまり，横軸と縦軸とを入れ替えたもの）が，逆関数 $C(x)$ のグラフになる．

逆算することもできる．例えば，ある企業の生産技術が

$$c(x) = wx^{3/2} \tag{30}$$

なる費用関数によって表現されているとしよう．この企業は，x だけの生産物を作り出すために，$c(x) = wx^{3/2}$ だけの費用をかける必要がある．生産要素の単位価格は w であるから，$c(x) = wx^{3/2}$ だけの費用がかかるということは，それはすなわち，$c(x)/w = x^{3/2}$ だけの生産要素を投入する必要があるということに他ならない．このような「x 単位の生産物を生み出すために必要な生産要素の量」を $C(x)$ で表わすことにしよう．つまりこの例では，$C(x) := x^{3/2}$ である．この企業は，$x = 4$ 単位の生産物を産出するためには，$C(4) = 4^{3/2} = 8$ 単位の生産要素を投入しなければならず，生産物の量を $x = 9$ に増産するためには，$C(9) = 9^{3/2} = 27$ 単位の生産要素が必要となる．これは逆に言えば，$z = 8$ 単位の生産要素を投入することで，$4 = 8^{2/3}$ 単位の生産物を生み出すことができ，生産要素の投入量を $z = 27$ まで増やせば，生産物の産出量を $9 = 27^{2/3}$ 単位まで増加させることができるということである．同様の手続きを他の生産量と生産要素投入量の組についても行うことで，この企業の生産技術を表現する生産関数は

$$f(z) = z^{2/3} \tag{31}$$

であることが分かる．ここで，(31) における $z^{2/3}$ が，(30) における $x^{3/2}$ の逆関数になっていることに注意しよう．やはりこれも偶然ではなく，一般に，ある企業の生産技術が費用関数 $c(x)$ によって与えられている時，$C(x) := c(x)/w$ の逆関数がその企業の生産関数となる．

3　供給関数と要素需要関数の導出

それでは，具体的な利潤最大化問題を考えながら，供給関数と要素需要関数を実際に求めてみよう．

3.1　供給関数と要素需要関数

ある企業の生産技術が，生産関数

$$f(z) := z^{1/2} \quad \forall z \in \mathbb{R}_+ \tag{32}$$

によって表現されているとする．生産要素価格を w，生産物価格を p と表記しよう．するとこの企業は

$$z^* \in \underset{z \in \mathbb{R}_+}{\operatorname{argmax}} \{pf(z) - wz\} \tag{33}$$

を満たすような z^* を，生産要素の投入量として選択する．(33) は 1 変数関数の最大化問題であるから，z^* がこの問題の解であるならば

$$(pf(z) - wz)'|_{z=z^*} = 0 \iff pf'(z^*) = w \tag{34}$$

が成立するはずである．いま生産関数は (32) で与えられていたから，これはさらに

$$pf'(z^*) = w \iff \frac{p(z^*)^{-1/2}}{2} = w \iff z^* = \left(\frac{1}{2}\frac{p}{w}\right)^2 \tag{35}$$

のように書き換えられる．また，生産要素を z^* だけ投入した時の生産量は $x^* = f(z^*)$ であるから，(35) で求めた z^* を (32) に代入することで，

$$x^* = f(z^*) = (z^*)^{1/2} = \frac{1}{2}\frac{p}{w} \tag{36}$$

を得る．したがって，この企業の利潤を最大化する生産パターンは

$$(z^*, x^*) = \left(\left(\frac{1}{2}\frac{p}{w}\right)^2, \frac{1}{2}\frac{p}{w}\right) \tag{37}$$

である．

いま求めた (z^*, x^*) が，(w, p) の値によって変化することに注意しよう．つまり，既に予告していた通り，要素需要関数と供給関数はいずれも価格ベクトルの関数になる．このことをより明示的に表現するために，要素需要関数と供給関数を，それぞれ

$$z^d(w,p), \quad x^s(w,p) \tag{38}$$

のように書くこともある．上の例では

$$z^d(w,p) := \left(\frac{1}{2}\frac{p}{w}\right)^2, \quad x^s(w,p) := \frac{1}{2}\frac{p}{w} \tag{39}$$

である．生産要素の価格 w が上昇すれば，生産要素の投入量 $z^d(w,p)$（これはつまり，企業の生産要素に対する需要量である）が減少し，結果として生産物の産出量 $x^s(w,p)$（つまりは生産物の供給量）も減少する．一方，生産物の価格 p が上昇した場合には，利潤を最大にするような生産物の産出量 $x^s(w,p)$ は増加し，そのために投入される生産要素の量 $z^d(w,p)$ も増えることになる．

同じ問題を，今度は費用関数を用いて解いてみよう．ある企業の生産技術が，費用関数

$$c(x) := wx^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \tag{40}$$

によって表現されているとする．この (40) で定義される費用関数 c は，(32) で定

義される生産関数 f と同一の生産技術を表現するものである[6]．この企業の利潤を最大にする生産量は，

$$x^* \in \operatorname*{argmax}_{x\in\mathbb{R}_+}\{px - c(x)\} \tag{41}$$

を満たす x^* である．(41) は 1 変数関数の最大化問題であるから，x^* がこの問題の解であるならば

$$(px - c(x))'\,|_{x=x^*} = 0 \iff p = c'(x^*) \tag{42}$$

が成立するはずである．いま費用関数は (40) で与えられていたから，これはさらに

$$p = c'(x^*) \iff p = 2wx^* \iff x^* = \frac{1}{2}\frac{p}{w} \tag{43}$$

のように書き換えられる．また，$c(x^*)$ だけの費用がかかった場合の要素投入量は $z^* = c(x^*)/w$ であるから，(43) で求めた x^* を代入して

$$z^* = \frac{c(x^*)}{w} = \frac{w(x^*)^2}{w} = \left(\frac{1}{2}\frac{p}{w}\right)^2 \tag{44}$$

を得る．よって，この企業の利潤を最大化する生産パターンは，やはり

$$(z^*, x^*) = \left(\left(\frac{1}{2}\frac{p}{w}\right)^2, \frac{1}{2}\frac{p}{w}\right) \tag{45}$$

であり，したがって要素需要関数と供給関数は，それぞれ

$$z^d(w,p) := \left(\frac{1}{2}\frac{p}{w}\right)^2, \quad x^s(w,p) := \frac{1}{2}\frac{p}{w} \tag{46}$$

のように求められる．

もう一つ例を挙げよう．ある企業の生産技術が，生産関数

$$f(z) := z^{1/3} \quad \forall z \in \mathbb{R}_+ \tag{47}$$

によって表現されているケースを考える．関数 $f(z)$ の逆関数は $C(x) = x^3$ であるから，この企業の生産技術を費用関数で表現するならば

$$c(x) := wC(x) = wx^3 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \tag{48}$$

となろう．この企業が x だけの生産物を作ろうとすれば，(47) から x^3 だけの生産

[6] (32) で定義される生産関数 f の逆関数は $C(x) = x^2$ であるから，対応する費用関数は $wC(x) = wx^2$ となる．つまり，この企業が x だけの生産物を作ろうとすれば，$C(x) = x^2$ だけの生産要素を投入する必要があり，それだけの要素を投入するためには $wC(x) = wx^3$ だけの費用がかかる．

要素を投入する必要があり，それだけの要素を投入するためには wx^3 だけの費用がかかる．

この企業の要素需要関数と供給関数を，まずは生産関数を用いて導出してみよう．先程の例と同様にして，利潤最大化問題は

$$z^* \in \underset{z\in\mathbb{R}_+}{\operatorname{argmax}}\{pf(z) - wz\} \tag{49}$$

のように書くことができるから，z^* がこの問題の解であるならば

$$(pf(z) - wz)'\,|_{z=z^*} = 0 \iff pf'(z^*) = w \tag{50}$$

を見たすはずである．いま生産関数は (47) で与えられていたから，これはさらに

$$pf'(z^*) = w \iff \frac{p(z^*)^{-2/3}}{3} = w \iff z^* = \left(\frac{1}{3}\frac{p}{w}\right)^{3/2} \tag{51}$$

のように書き換えられ，この z^* が利潤を最大化する要素投入量である．また，生産要素を z^* だけ投入した時の生産量は $x^* = f(z^*)$ であるから，(51) で求めた z^* を (47) に代入することで，

$$x^* = f(z^*) = (z^*)^{1/3} = \left(\frac{1}{3}\frac{p}{w}\right)^{1/2} \tag{52}$$

のように，利潤を最大化する生産量 x^* を得る．したがって，この企業の要素需要関数と供給関数は

$$z^d(w,p) := \left(\frac{1}{3}\frac{p}{w}\right)^{3/2}, \quad x^s(w,p) := \left(\frac{1}{3}\frac{p}{w}\right)^{1/2} \tag{53}$$

である．

生産関数の代わりに費用関数を用いても，要素需要関数と供給関数を同様に求めることができる．費用関数を用いた場合，この企業の利潤最大化問題は

$$x^* \in \underset{x\in\mathbb{R}_+}{\operatorname{argmax}}\{px - c(x)\} \tag{54}$$

のように書くことができるから，x^* がこの問題の解であるならば

$$(px - c(x))'\,|_{x=x^*} = 0 \iff p = c'(x^*) \tag{55}$$

が成立するはずである．いま費用関数は (48) で与えられていたから，これはさらに

$$p = c'(x^*) \iff p = 3w(x^*)^2 \iff x^* = \left(\frac{1}{3}\frac{p}{w}\right)^{1/2} \tag{56}$$

のように書き換えられ，この x^* が利潤を最大化する生産量である．また，$c(x^*)$ だけの費用がかかった場合の要素投入量は $z^* = c(x^*)/w$ であるから，(56) で求めた x^* を代入して

$$z^* = \frac{c(x^*)}{w} = \frac{w(x^*)^3}{w} = \left(\frac{1}{3}\frac{p}{w}\right)^{3/2} \tag{57}$$

として，利潤を最大化する要素投入量 z^* を得る．したがって要素需要関数と供給関数は，やはりそれぞれ

$$z^d(w,p) := \left(\frac{1}{3}\frac{p}{w}\right)^{3/2}, \quad x^s(w,p) := \left(\frac{1}{3}\frac{p}{w}\right)^{1/2} \tag{58}$$

のように求められる．

3.2 限界費用関数と供給関数

経済学では，費用関数の微分係数のことを限界費用（marginal cost）と呼ぶ．限界費用とは，大雑把に言えば，「もう一単位追加的に財を生産するために必要となる費用」のことである[7]．一般に，限界費用 $c'(x)$ は x の値によって異なったものになる．トマトの生産量を 2 トンから 3 トンに増やすための費用は，おそらく 3 トンから 4 トンに増やすための費用と同じではない．生産量 x に応じて，そこからもう一単位追加的に増産することの費用 $c'(x)$ は変わってくる（図 4）．これはつまり，限界費用 $c'(x)$ は x の関数になるということである．そして，この「限界費用 $c'(x)$ を x の関数と見なしたもの」を限界費用関数（marginal cost function）と呼ぶ（図 5）．

限界費用関数 $c'(x)$ は，供給関数 $x^s(w,p)$ と密接に関係している．というより，限界費用関数は供給関数そのものである．このことを理解するために，費用関数を用いた場合の利潤最大化問題を再び考えよう．上記の例の中で既に述べた通り，利潤を最大化する生産量 x^* は

$$(px - c(x))'|_{x=x^*} = 0 \tag{59}$$

したがって

$$c'(x^*) = p \tag{60}$$

[7] 関数の微分係数が「変数を少しだけ変化させたときに，関数の値がどれだけ変化するか」を意味するものであったことを思い出そう．

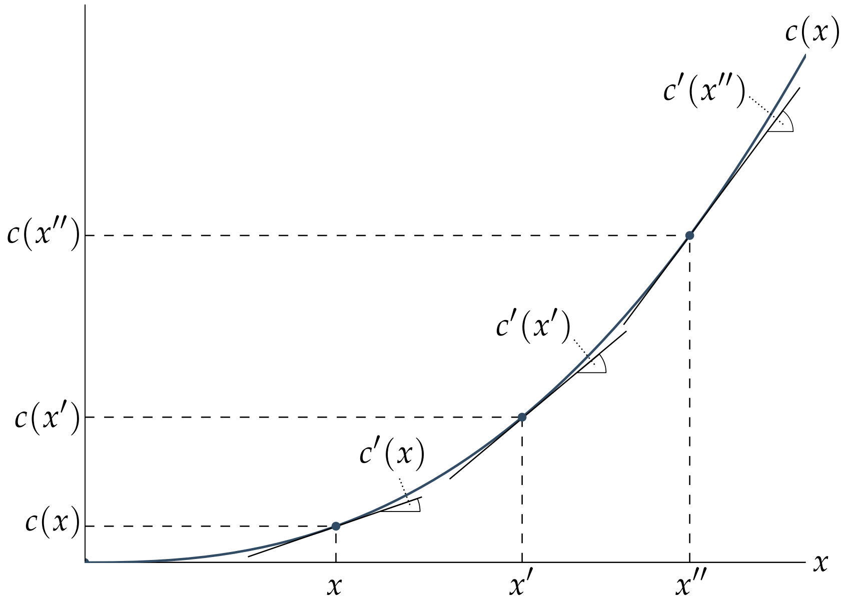

図 4: 費用関数と限界費用

を満たす．つまり利潤最大化問題の解 x^*（それはすなわち供給関数 $x^s(w,p)$ である）は，「限界費用が価格に等しくなるように」決定される．ここで，この関係が価格 p の値によらず常に妥当する，ということに注意しよう[8]．例えば財の価格が p から $p' > p$ に上昇すれば，それに応じて供給量も調整されることになるが，その場合にも，上昇した価格 p' に限界費用 $c'(x^*)$ が一致するように x^* が調整されることになる（その調整された x^* の値が $x^s(w,p')$ である）．財の価格がさらに $p'' > p'$ まで上昇した場合にも，やはり上昇した価格 p'' に限界費用 $c'(x^*)$ が一致するように供給量 x^* が調整される（その調整された x^* の値が $x^s(w,p'')$ である）．このような関係は，図 5 からも明らかであろう．価格 p と供給量 $x^s(w,p)$ との関係は，限界費用関数 $c'(x)$ によって完全に特徴付けられるのである．

典型的な供給関数を図 6 に示した．幾何的には，限界費用関数を 45 度線で折り返したものが供給関数となる（例えば図 5 の $c'(x)$ について，縦軸と横軸とを入れ替えれば図 6 を得る）．これは言い換えれば，限界費用関数は供給関数の逆関数（したがって供給関数は限界費用関数の逆関数）に他ならず，限界費用関数が供給関数そのものであるというのはこのような意味においてである．

[8]より現実的な生産技術を仮定すれば，価格が十分に低くなると生産が全く行われなくなると考えられるため，この表現は必ずしも正確ではない．価格が低い場合に生産が行われなくなるのは，固定費用や分業の利益等の存在による．企業の参入などが起こる「長期の問題」を考える際には，このようなより現実的な生産技術が重要な役割を果たすが，この講義で扱う単純なケースにおいては (60) の関係が常に成立すると考えて良い．

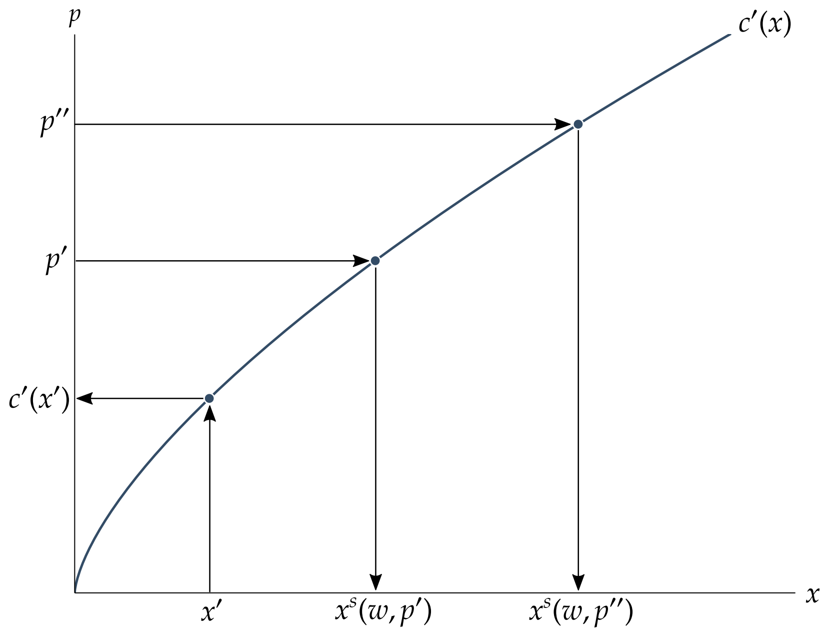

図 5: 限界費用関数と供給関数

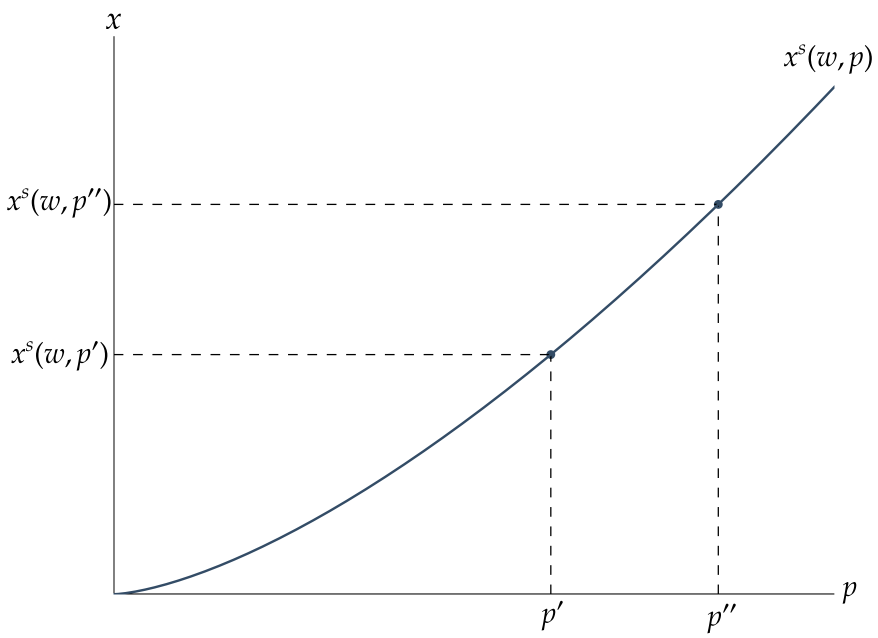

図 6: 供給関数

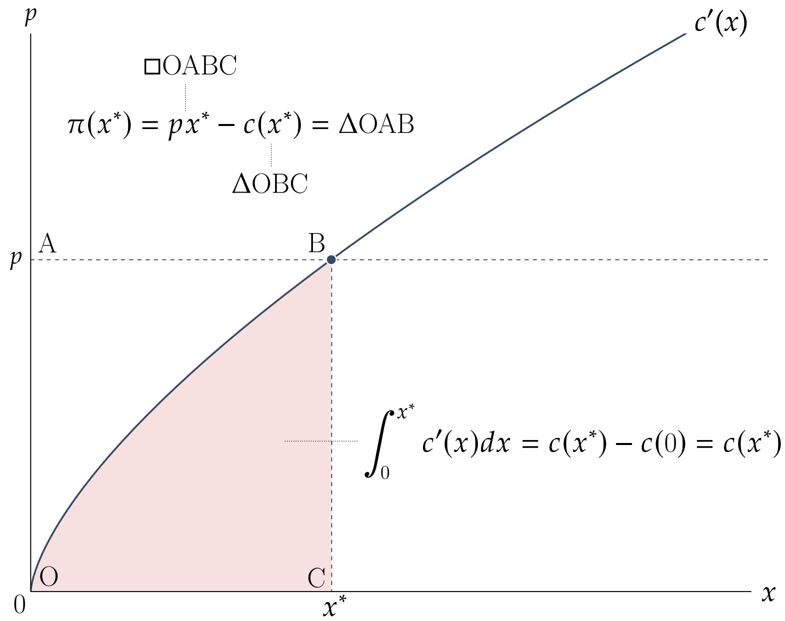

図 7: 利潤の最大化

3.3 幾何的な説明

前節で見た「企業は限界費用が価格に等しくなるような生産量を選ぶ」という結果は，簡単な図を用いて説明することもできる．具体的な例として，企業の限界費用関数 $c'(x)$ のグラフが図 7 のような形で与えられてい場合を考えよう．この企業は，例えば価格が p であれば $p = c'(x^*)$ を満たすような x^* を選ぶ．この時の収益は px^* であるから，図 7 の中で表現するならば，それはの四角形 OABC の面積に相当する．一方の費用 $c(x^*)$ は，図の中で示したように，三角形 OBC の面積で表わされる．したがって，四角形 OABC の面積から三角形 OBC の面積を減じた残り，すなわち三角形 OAB の面積が企業の利潤である．

ここで仮に，x^* よりも低い水準（例えば図 8 の $x' < x^*$ のような）で生産を行った場合に利潤がどのように変化するか考えてみよう．この時の収益は px' であるから，図 8 の四角形 OAB'C' の面積に相当する．一方の費用 $c(x')$ は三角形 OD'C' の面積で表わされるから，x' 単位の財を生産した場合の企業の利潤は四角形 OAB'D' の面積になる．これは明らかに，x^* 単位の財を生産した場合の利潤（三角形 OAB の面積）よりも小さい．逆に，x^* よりも多くの財（例えば図 9 の $x'' > x^*$ のような）を生産した場合はどうであろうか．この時の収益は px'' であるから，図 9 の四角形 OAB"C" の面積となる．しかし費用 $c(x'')$ も三角形 OD"C" の面積まで拡大し，結果として x'' 単位の財を生産した場合の利潤は三角形 OAB の面積から三角形 D"B"B の面積を減じたもの（当然ながらそれは三角形 OAB の面積よりも小さい）になる．したがって，x^* の水準で生産を行うことがこの企業の利潤を最大化することになるのである．

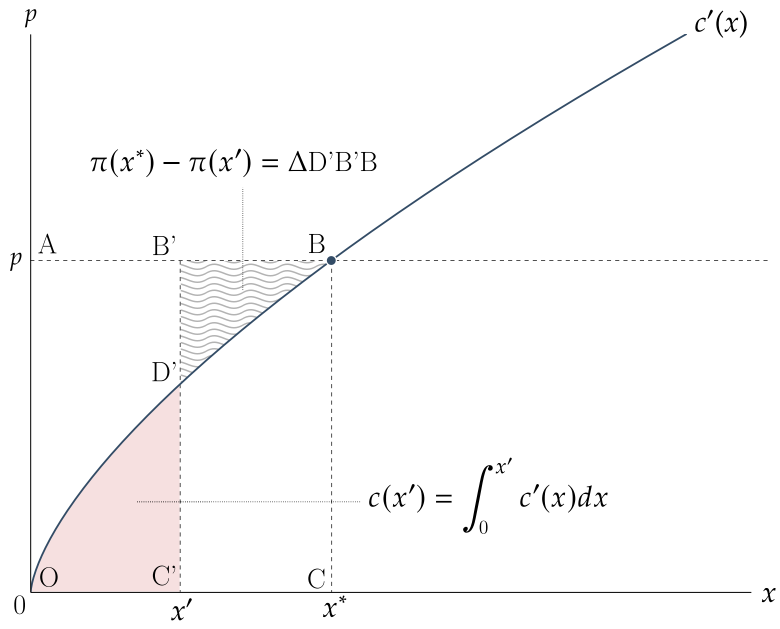

図 8: 過少生産（$x' < x^*$）による利潤の減少

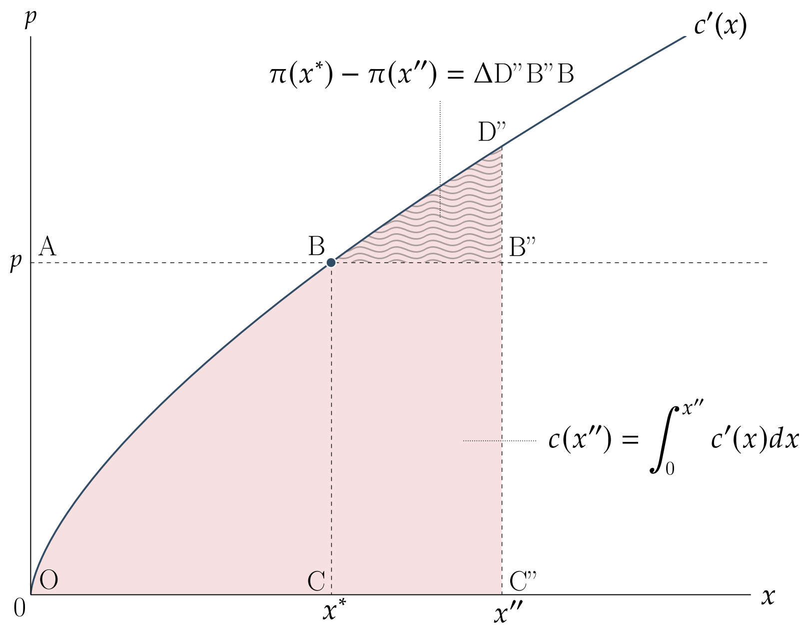

図 9: 過剰生産（$x'' > x^*$）による利潤の減少

4　集計

ここで関心の範囲を少し広げて，経済全体に目を向けることにしよう．ある経済に，合計で $J \in \mathbb{N}$ 個の企業が存在する場合を考える．企業の数は $J = 10$ でも $J = 1000000$ でも構わない．さしあたって我々は，この経済には消費できる物理的な財が一つしか存在しないと考え，いずれの企業も労働を用いてその財を生産しているものと仮定しよう．これは話を簡単にするための方便であり，原理的には財の数はいくつあってもよい．

経済に存在する企業を $j \in \{1, 2, \ldots, J\}$ という番号で識別し，その生産技術を費用関数 $c_j : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ によって表現する．このときそれぞれの企業は，

$$x_j^* \in \operatorname*{argmax}_{x_j \in \mathbb{R}_+} \{p x_j - c_j(x_j)\} \tag{61}$$

を満たす x_j^* を生産・供給し，そのために

$$z_j^* = c_j(x_j^*)/w \tag{62}$$

だけの生産要素（労働時間）を投入・需要する．財の供給量 x_j^* や労働の需要量 z_j^* が (w, p) の関数であることを明示して，それぞれを関数の形で，つまりは $x_j^s(w, p)$ や $z_j^d(w, p)$ のように書くことにする．

4.1　財供給の集計

財 x の市場を考えた場合，市場全体で集計した供給は

$$X^s(w, p) := \sum_{j=1}^{J} x_j^s(w, p) \tag{63}$$

のように表現できる．X^s は (w, p) の関数であり，これを集計供給関数（aggregate supply function）と呼ぶ．集計供給関数は，財の価格等の変化に応じて市場全体の供給がどのように反応するのかを記述したものである．

具体的な例を挙げよう．企業 j の生産技術が，費用関数

$$c_j(x) := w x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \tag{64}$$

によって表現されているとする[9]．すると前節の議論から，企業 j の要素需要関数

[9] この費用関数は j に依存しないので，この例では全ての企業が同一の生産技術を持つようなケースを考えていることになる．これも説明のための便宜であり，分析の一般性を損うものではない．原理的には，生産技術は企業によって異なっても構わない．

と供給関数は，それぞれ

$$z_j^d(w,p) := \left(\frac{1}{2}\frac{p}{w}\right)^2, \quad x_j^s(w,p) := \frac{1}{2}\frac{p}{w} \tag{65}$$

のように求められる．したがって，この時の集計供給関数は

$$X^s(w,p) := \sum_{j=1}^{J} x_j^s(w,p) = \frac{J}{2}\frac{p}{w} \tag{66}$$

である．

別の例として，企業の費用関数が

$$c_j(x) := wx^3 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \tag{67}$$

によって与えられているようなケースを考えてみよう．すると，再び前節の議論から，企業 j の要素需要関数と供給関数は

$$z_j^d(w,p) := \left(\frac{1}{3}\frac{p}{w}\right)^{3/2}, \quad x_j^s(w,p) := \left(\frac{1}{3}\frac{p}{w}\right)^{1/2} \tag{68}$$

のように導出できる．したがって，この場合の集計供給関数は

$$X^s(w,p) := \sum_{j=1}^{J} x_j^s(w,p) = J\left(\frac{1}{3}\frac{p}{w}\right)^{1/2} \tag{69}$$

である．

4.2 逆供給関数

とくに集計的な供給を扱うとき，経済学ではしばしば逆供給関数（inverse supply function）というものを考える．逆供給関数とは，供給と価格との関係を逆さに見たものである．集計供給関数は「価格が p の時には市場全体で $X^s(w,p)$ だけの財が供給される」という関係を表わすものであった．一方，逆供給関数とは，「市場全体で X だけの財が供給されるためには，価格は $p^s(X)$ でなければならない」という逆の関係を表現する．幾何的に言えば，集計供給関数 $X^s(w,p)$ のグラフを 45 度線で折り返したもの（これは個別の企業の限界費用曲線を横方向に積み上げたものに一致する）が，逆供給関数 $p^s(X)$ のグラフである（図 10 および図 11）．より正確には，逆供給関数とは集計供給関数 $X^s(w,p)$ の（それを p の関数と見た時の）逆関数のことである．

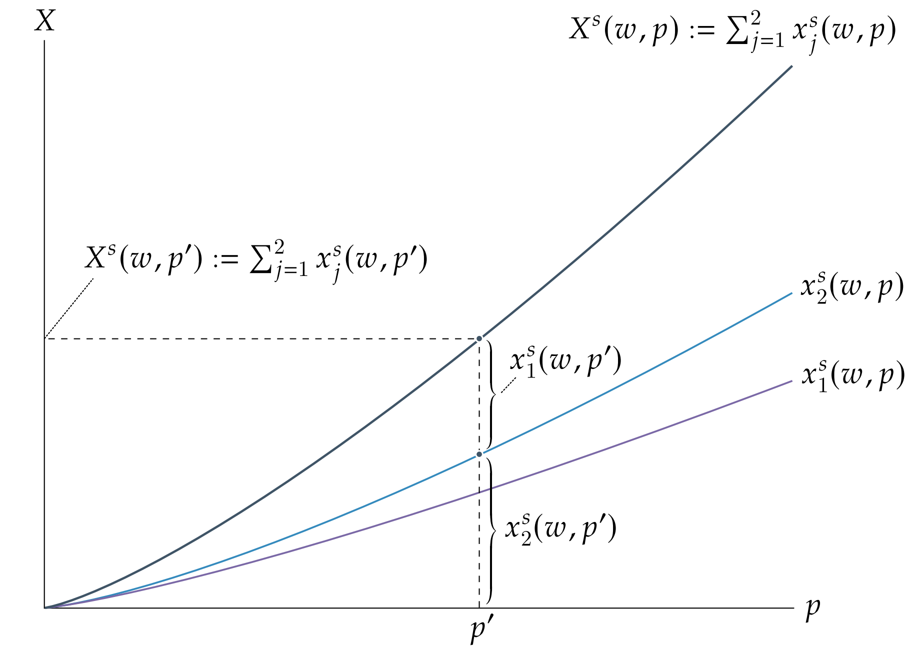

図 10: 集計供給関数（企業の数が $J = 2$ のケース）

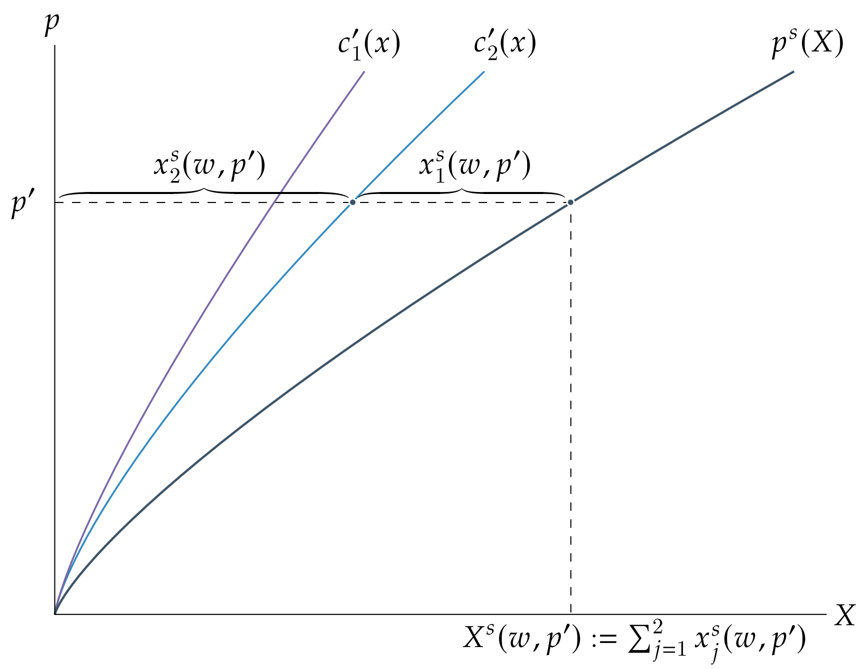

図 11: （集計）逆供給関数（企業の数が $J = 2$ のケース）

4.3　労働需要の集計

企業によって需要される労働時間についても，市場全体での集計値を考えることができる．つまり，それぞれの企業が $z_j^d(w,p)$ だけの労働時間を投入・需要するのであるから，労働市場全体では

$$Z^d(w,p) := \sum_{j=1}^{J} z_j^d(w,p) \tag{70}$$

だけの労働時間が需要されることになる．Z^d は (w,p) の関数であり，これを集計労働需要関数（aggregate labor demand function）と呼ぶ．集計労働需要関数は，賃金率等の変化に応じて労働市場全体の需要量がどのように反応するのかを記述したものである．

やはり具体的な例を挙げておく．企業 j の生産技術が，(64) で定義される費用関数によって表現されているとしよう．前節の議論から，この時の企業 j の労働需要関数は

$$z_j^d(w,p) := \left(\frac{1}{2}\frac{p}{w}\right)^2 \tag{71}$$

であることが分かっている．したがって，集計労働需要関数は

$$Z^d(w,p) := \sum_{j=1}^{J} z_j^d(w,p) = J\left(\frac{1}{2}\frac{p}{w}\right)^2 \tag{72}$$

である．

別の例として，企業の費用関数が (67) で定義される費用関数によって与えられているようなケースを考えてみよう．再び前節の議論から，企業 j の労働需要関数は

$$z_j^d(w,p) := \left(\frac{1}{3}\frac{p}{w}\right)^{3/2} \tag{73}$$

である．よって，この場合の集計労働需要関数は

$$Z^d(w,p) := \sum_{j=1}^{J} z_j^d(w,p) = J\left(\frac{1}{3}\frac{p}{w}\right)^{3/2} \tag{74}$$

となる．